Глава 15

Дробный квантовый эффект Холла

План

- Симметрийные соотношения в КЭХ и глобальая фазовая диаграмма КЭХ

15.1 Дробный квантовый эффект Холла (FQHE)

В режиме FQHE протяженные плато ρ_{xy} наблюдаются при дробных значениях фактора заполнения $\nu = p/q$ (q - нечетное целое) и имеют величину $\rho_{xy} = h/\nu e^2 = (q/p)h/e^2$. Рассмотрим, для простоты основное дробное состояние $\nu = 1/3$. Для невзаимодействующих электронов состояние с неполностью заполненным уровнем Ландау является обычным металлом, в котором уровень Ферми лежит в области большой плотности состояний, а не в щели. Поэтому возникновение энергетической щели при $\nu = 1/3$ должно быть следствием межэлектронных взаимодействий на нижнем уровне Ландау. Т.о., FQHE является коллективным явлением, следствием електрон-электронного взаимодействия. Как упоминалось ранее, в вы-

ражении для квантованного значения сопротивления в режиме QHE одна степень e возникает из-за кванта потока, другая степень - из-за заряда квазичастиц. Поскольку квант потока не перенормируется, то естесственное предположение (оказавшееся впоследствие правильным) состоит в том, что заряд возбуждений имеет дробную величину $e^* = e/3$. В нобелевской лекции Штермера упоминается первое впечатление - "кварки !" - которое произвело наблюдение этого эффекта на Дэна Цуи.

Волновая функция для основного состояния в режиме ДКЭХ:
В случае, когда фактор заполнения $\nu < 1$, число вырожденных состояний больше чем число частиц на нижнем уровне Ландау. Лафлин предложил простейшую волновую функцию для состояния $\nu = 1/q$ ($q > 3$ - нечетное) которая обладает требуемыми симметрийными свойствами [9]

$$\Psi_L(q)(Z_1, Z_2, ...Z_N) = \prod_{\langle i,j \rangle} (z_i - z_j)^q \exp\left[-\sum_l \frac{|z_l|^2}{4l_H^2} \right], \quad (15.1)$$

где - q - нечетное число, а координаты выражены в виде комплексных чисел $z = x + iy$. Мы далее проверим соотношение точных решений для малых систем электронов и волновой функции Лафлиновского типа.

Если $q = 1$ ($\nu = 1$), то произведение в этой формуле образует Слэтеровский детерминантодноэлектронных уровней с угловым моментом, изменяющимся от 0 до $N - 1$ (N - число электронов). Это следует из того факта, что, в гармонической потенциальной яме, в наинизшей зоне Ландау одночастичные состояния с угловым моментом m имеют вид $z^m \exp(-|z|^2/4)$. Роль внешнего удерживающего потенциала состоит только в том, чтобы изменить одночастичную частоту ω_c на $\omega_k = \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2/4}$

[14]. Лафлиновское состояние (последняя формула) с $q = 1$ подобна Хартри-Фоковской аппроксимации дроплета с максимальной плотностью. Это состояние имеет полный угловой момент $L = N(N-1)/2$. Полный угловой момент основного состояния зависит от магнитного поля. Лафлиновское состояние с $q = 3$ становится оценкой основного состояния когда $L_3 = 3N(N21)/2$. В таких сильных магнитных полях одночастичные состояния высших уровней Ландау вытолкнуты вверх по энергии и разумно предположить, что точное основное состояние состоит только из конфигураций наинизших зон Ландау. Действительно, последующие вычисления показали, что совпадание (перекрытие) $\Psi_L(3)$ с точной волновой функцией близко к единице 1 в системах с конечным числом частиц: более чем 0.99 когда $N < 10$ [15, 16, 17].

Таким образом, Лафлиновская волновая функция, которая начале была предложена как вариационная, впоследствие оказалась практически точной волновой функцией для состояния $\nu = 1/3$ [8].

Свойства волновой функции Лафлина:
(1) антисимметрична по перестановке любой пары частиц (при q-нечетном);
(2) обеспечивает нахождение частиц далеко друг от друга, так что они имеют меньшую Кулоновскую энергию отталкивания для $q > 1$;
(3) в термодинамическом пределе она описывает систему электронов с плотностью $1/2\pi q l_H^2$, т.е. с фактором заполнения $\nu = 1/q$ - что соответствует эксперименту.
Последнее свойство Лафлин доказывал элегантным способом: если волновую функцию возвести в квадрат, то она окажется совпадающей с функцией распределения классической од-

нокомпонентной плазмы. Действительно, представим $|\Psi|^2$ как классическую плотность вероятности

$$|\Psi_{1/q}(z_1, z_2, ...z_N)|^2 = \exp\left[-\beta\Phi(z_1, z_2, ...z_N)\right] \tag{15.2}$$

Здесб β - фиктивная обратная температура, значение которой не важно. Лафлин для простоты положил $\beta = 1/q$ Выбрав $\beta = 1/q$ получаем

$$\Phi(z_1, z_2, ...z_N) = -2q^2 \sum_{j<k}^{N} \ln|z_j - z_k| + \frac{q}{2l_H^2} \sum_{j}^{N} |z_j|^2. \tag{15.3}$$

Но это есть потенциальная энергия набора двумерных частиц с зарядом q, которые отталкиваются логарифмически, (т.е. нормальный кулоновский двумерный потенциал) и притягиваются к началу координат одночастичным потенциалом - однородной плотностью заряда $1/2\pi l_H^2|z_i|^2$. Этот потенциал можно рассматривать как создаваемый однородным положительным зарядом ρ_+ с плотностью $1/(2\pi q l_H^2)$. Действительно, для локальной электронейтральности в плазме частицы должны иметь такую плотность. Наименьшая энергия этой классической плазмы достигается когда отрицательная плотность заряда $q/3)/(2\pi l_H^2)$ точно компенсирует положительный заряд и обеспечивает зарядовую нейтральность. Это дает $q = 3$

Волновая функция для возбуждений (квазичастиц) в режиме ДКЭХ:

Laughlin [15] предложил, что низкоэнергетическое возбуждение соответствует дробному заряду $1/q$ и может быть описано волновой функцией

$$\Psi_L^N(q) = \sum_{i}^{N} (z_i - z_0)\psi_L(q), \tag{15.4}$$

где угловой момент увеличен в N раз, N - число частиц в конечной системе. Для малых систем эта волновая функция, действительно, хорошо перекрывается с точным решением [15].

Добавить: Мысленный эксперимент Лафлина для квазичастиц с дробным зарядом.

15.1.1 Калибровочное поле Черна-Саймонса и статистика CF

Присоединим к каждому электрону трубку потока, несущую поток $\alpha\phi_0$, где ϕ_0- квант потока. Это приводит к магнитному полю Черна-Саймонса (CS)

$$\vec{b}(\vec{r}) = \alpha\phi_0 \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)\hat{z} \tag{15.5}$$

где $\vec{r}_i$ - положение i-того электрона. Это калибровочное фиктивное магнитное поле не оказывает влияние на классические уравнения движения, потому что (i) два электрона не могут находиться в одном и том же месте, и (ii) электрон не ощущает магнитное поле в виде δ- функций. Однако, в квантовой механике вектор-потенциал $\vec{a}(\vec{r})$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \alpha\phi_0 \int d^2r_1 \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \Psi^\dagger(r_1)\Psi(r_1) \tag{15.6}$$

вносит фазовый множитель в волновую функцию. Здесь $\Psi^\dagger(r_1)\Psi(r_1)$ - оператор плотности $\rho(r_1)$ для электронной жидкости. Гамильтониан, включающий CS калибровочное поле $\vec{a}(\vec{r})$ выглядит так

$$H = (2m)^{-1} \int d^2r \Psi^\dagger(r) \left[-i\hbar\vec{\nabla}_r + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}) + \frac{e}{c}\vec{a}(\vec{r}) \right]^2 \Psi(r) \tag{15.7}$$

Этот Гамильтониан содержит член пропорциональный $\vec{a}(\vec{r})$ в степени n (где $n = 0, 1$ или 2). Член с $n = 1$ дает обычное двухчастичное взаимодействие, член $n = 2$ - трехчастичное взаимодействие , которым обычно пренебрегают. CS-Гамильтониан сложен. Упрощения можно достичь в приближении среднего поля (MFA), когда оператор $\rho(\vec{r})$ заменяется однородной равновесной плотностью электронов n_s. Тогда результирующий MF-Гамильтониан будет равен сумме одночастичных Гамильтонианов, в которых появится *эффективное магнитное поле*

$$B^* = B + \alpha\phi_0 n_s \tag{15.8}$$

15.1.2 Композитные фермионы, коммутационные соотношения и статистика композитных фермионов

После успеха волновой функции Лафлина в описании состояния $\nu = 1/3$, было предложено несколько идей позволяющих генерировать последовательность высших состояний из родительского состояния 1/3. Однако все они встретились с трудностями и, в частности, не могли объяснить, в чем отличие состояний с q четными от состояний с нечетными q. Эксперимент же явно демонстрировал, что например состояние с $\nu = 1/2$ не является щелевым.

Наиболее успешная и альтернативная концепция была предложена Дж. Джэйном, который ввел идею композитных квазичастиц для отображения электрона с присоединенными трубками потока, несущими число $\alpha(= 2q)$ квантов потока. В приближении среднего поля коэффициент заполнения для композитных фермионов ν^* равен $1/\nu^* = 1/\nu - \alpha$.

Выше упоминалось, что CS-калибровочное поле $\vec{b}(\vec{r}) = \nabla \times$

$\vec{a}(\vec{r})$ не оказывает влияние на классические уравнения движения, потому что заряженный CF никогда не испытывает δ-образное магнитное поле других композитных частиц. Однако в квантовой механике надо вспомнить эффект Ааронова-Бома [4], согласно которому фаза волновой функции изменяется в присутствии вектор-потенциала, даже если магнитное поле $\vec{b}(\vec{r})$ в районе классической траектории равно нулю.

Рассмотрим частицу с зарядом $-e$ и массой m, движущуюся по замкнутому пути в плоскости $x-y$ и пусть в центре этого пути имеется длинный тонкий соленоид с осью вдоль z. Если магнитное поле в соленоиде производит поток $\Phi = \alpha\phi_0$, то собственные функции

$$\phi_m(\vec{r}) = \exp\left[-\left(i\frac{e}{\hbar c}\int \vec{a}(\vec{r})d\vec{r}\right)\right]\Psi_m(\vec{r}). \tag{15.9}$$

Здесь $\Psi_m(\vec{r}) = \exp(im\phi)u_m(r)$ - собственная волновая функция для наинизшего уровня $n=0$. Поскольку $\vec{a}(\vec{r}) = (\Phi/2\pi r)\hat{\theta}$ и $d\vec{r} = (\vec{r}dr + \hat{\theta}rd\theta)$, то фазовый фактор в уравнении (15.9) будет равен $-i\alpha\theta$, где θ-угловое положение частицы движущейся вдоль пути. Это означает, что

$$\phi_m(\vec{r}) = e^{i(m-\alpha)\theta}u_m(r). \tag{15.10}$$

Если $\vec{r}$ описывает разность координат пар фермионов $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ уравнение (15.10) иллюстрирует перестановку в 2D системе. Перестановка частиц отвечает замене угла θ на угол $\theta+\pi$. Поэтому если α является нечетным целым, то фермионы становятся бозонами. В противоположном случае, когда α является четным целым, то фермионы остаются фермионами. Эта картину поясняет рисунок 15.1.

Причина трансмутации в том, что дополнительный поток CS-калибровочного поля охватываемый невозмущенной орби-

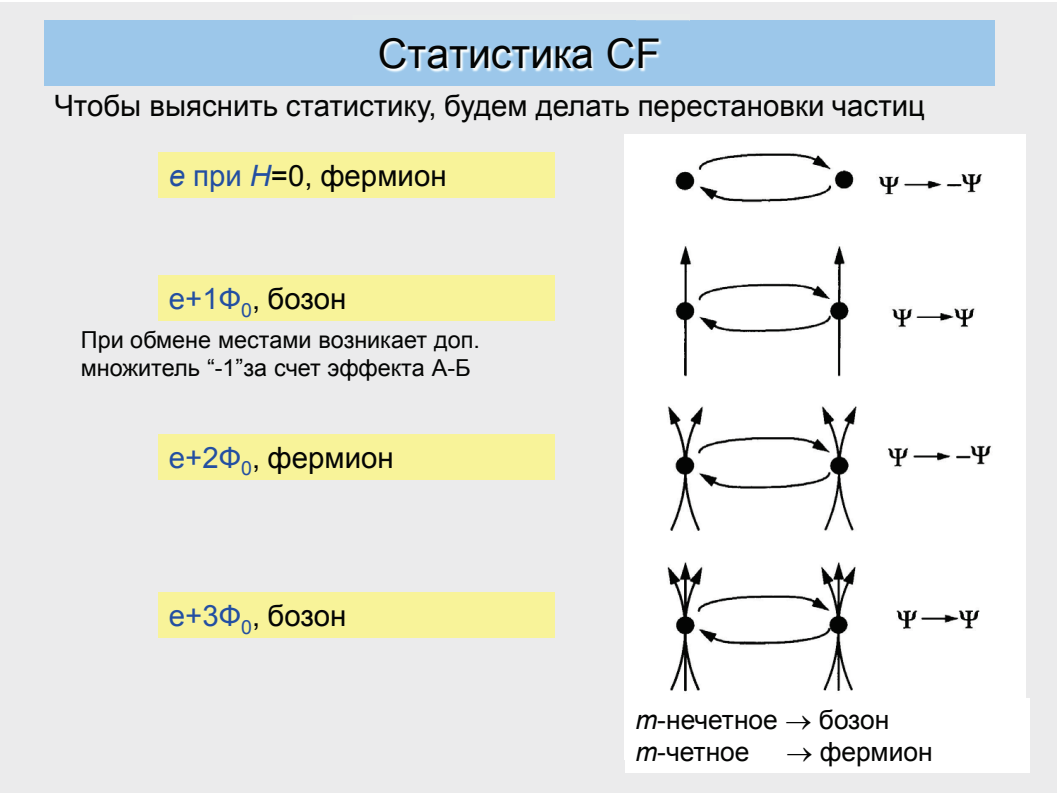


Рис. 15.1: Перестановки CF

той состояния u_{nm} изменяет фазу в угловой части волновой функции. Наконец, если α не является целым, то частицы подчиняются т.н. "энионной" (anyon) статистике [5]. Идея частиц с нецелочисленной статистикой была придумана еще в 1977г. Лейнаасом и Мирхеймом [12]и развита впоследствии Вилчиком [13, 5]. Пока в природе не обнаружены квазичастицы с дробной статистикой, хотя эта идея часто примеряется к новым эффектам. Заметим, что "энионы" могут существовать только в двумерной системе, поскольку в 3D случае петля траектории при перестановке частиц может быть сжата до нуля.

Для Лафлиновского состояния $\nu = 1/q$ с нечетным q, картина композитных фермионов в приближении среднего поля заменяет поле H на эффективное поле $H^* = H/q$. Это приводит к замене магнитой длины l_H на $l_{H^*} = q^{1/2} l_H$ в уравнении (15.1). Полуклассическая орбита движения в таком случае будет иметь радиус

$$r_m^* = q^{1/2} r_m = (2q|m|)^{1/2} l_H. \tag{15.11}$$

Для пары электронов в состоянии с $|m| = 1$ добавление к каждому электрону двух квантов потока дает $H^* = H/3$ и орбита композитных фермионов будет соответствовать орбите электрона с $|m| = q$.

Состояние $\nu = 1/3$

В терминах композитных фермионов физическая суть простейшего состояния $\nu = 1/3$ состоит в следующем. В этом состоянии обычный уровень Ландау для электронов заполнен всего на $1/3$ и на каждый электрон следовательно приходится 3 кванта потока. Если каждый электрон образует CF, объединяясь с 3 квантами потока, то такие CF будут являться бозонами. При точном соотношении $n = \Phi/3\Phi_0$ имется бозонная жидкость, описываемя Лафлиновской волновой функцией. Если магнитное поле становится чуть больше этого значения, то в системе возникают лишние вихри. Такой вихрь можно рассматривать как возбуждение с зарядом $-e/3$. При отклонении магнитного поля в другую сторону в системе имеется недостаток вихрей и снова возбуждениями являются вихри, но с зарядом $+e/3$. Возбуждения можно рассматривать как квазичастицы, которые отделены по энергии от основного состояния бозонной жидкости щелью; следовательно основное состояние

также является несжимаемым. Существование щели в спектре возбуждений соответствует эксперименту, так как позволяет объяснить протяженные плато ρ_{xy} и минимумы ρ_{xx}. Дробный заряд квазичастиц $e/3$ был также подтвержден рядом экспериментов.

Аналогично этому, состояния с $\nu = 1/5, 1/7$ можно рассматривать как состояния CF с присоединением к каждому электрону 5 и 7 квантов потока, соответственно. Для понимания причины возникновения других дробных состояний p/q с $p > 1$ легче воспользоваться симметрийными соображениями, что будет сделано ниже.

Состояние $\nu = 1/2$

В случае наполовину заполненного уровня Ландау, $\nu = 1/2$, композитые квазичастицы состоят из электрона с двумя присоединенными квантами потока; следовательно они являются фермионами. Образовавшиеся композитные фермионы (CF) не конденсируются в несжимаемую жидкость. Напротив, для них эффективное магнитно поле равно нулю и несмотря на огромное приложенное магнитное поле, они движутся не по циклтронным орбитам (как подобало бы обычным электронам в GaAs), а прямолинейно, не замечая поля. Это отражается в эксперименте в отсутствии признаков КЭХ - отсутствие плато ρ_{xy} и минимумов сопротивления ρ_{xx}. При отклонении магнитного поля от точного значения $\Phi = 2n\Phi_0$ композитые фермионы начинают испытывать слабое эффективное магнитное поле H^*, что проявляется в эксперименте в осцилляциях Шубникова-де Гааза, но теперь уже не для электронов, а для композитых фермионов. Картина осцилляций симметрично развиватся как при увеличении, так и уменьшении магнит-

ного поля относительно точного значения $\Phi = 2n\Phi_0$, подтверждая тем самым описанную выше интерпретацию.

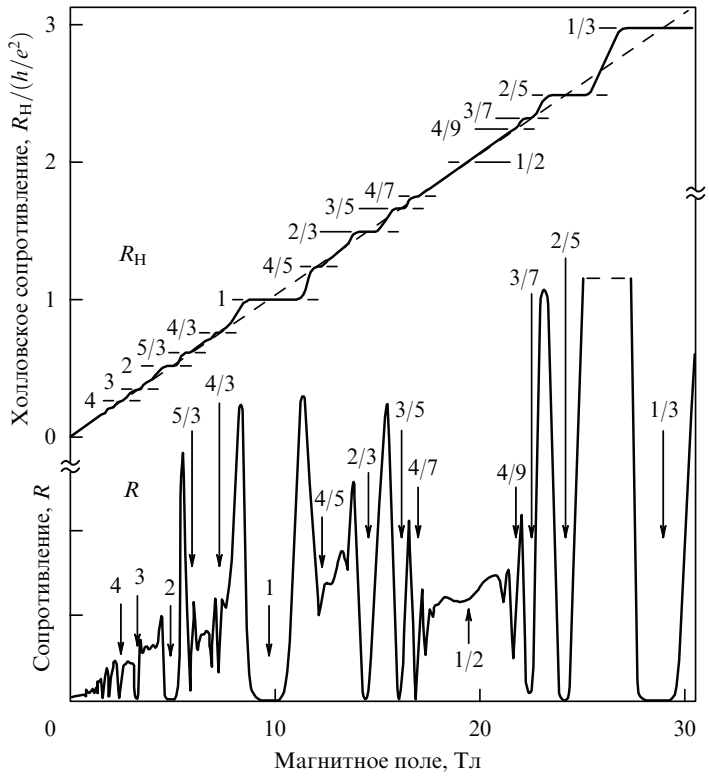


Рис. 15.2: ДКЭХ на структуре GaAs-AlGaAs с высокой подвижностью

Состояние $\nu = 5/2$

На первый взгляд, казалось бы, что состояние $\nu = 5/2$ должно иметь такие же свойства как и состояние $1/2$. Ведь они отличаются только на один полностью заполненный уровень Ландау. Однако, в экспериментах в состоянии $5/2$ наблюдаются явные признаки КЭХ: плато ρ_{xy} и минимумы ρ_{xx} (см. рисунок 15.4). Одно из объяснений этому эффекту состоит в

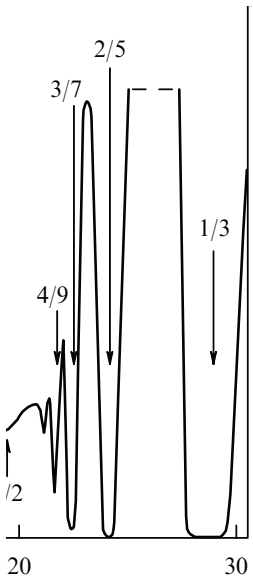


Рис. 15.3: ρ_{xx} vs $B_\perp$ вблизи $\nu = 1/2$: FQHE = IQHE для CF

том, что образовавшиеся CF взаимодействуют, образуют пары подобно Куперовским парам в сверхпроводнике, и конденсируются в энергетически более выгодное новое состояние. Таким образом, для объяснения этого состояния надо привлечь корреляции более высокого порядка.

15.1.3 Почему работает приближение среднего поля

Как упоминалось выше, полный Гамильтониан $\mathcal{H}$ включающий ЧС-калибровочное поле, в первом приближении, обычно рассматривается в терминах среднего поля (MF). Численные расчеты энергетического спектра в приближении среднего поля проводились во многих работах, в частности J. J. Quinn et al. [7]. Удивительным образом, в таком простом приближении получается правильное объяснение низкоэнергетической

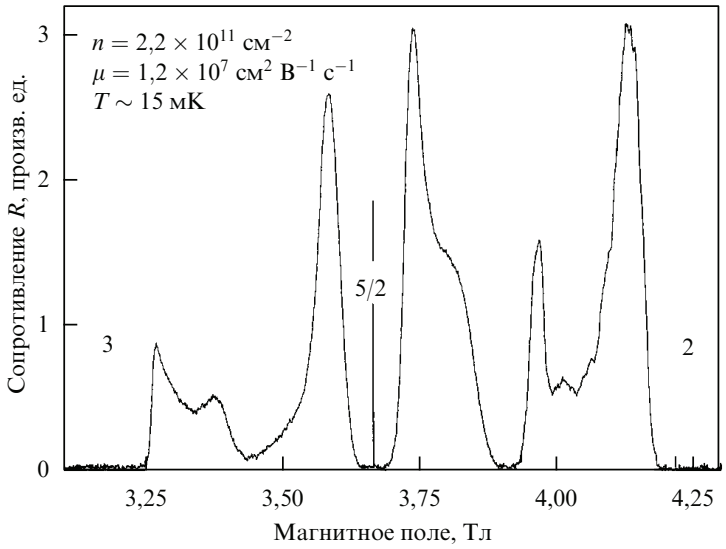


Рис. 15.4: Диагональное сопротивление в зависимости от поля вблизи состояния $\nu = 5/2$.

части спектра для CF состояний. Численные расчеты проводились также и за пределами приближения среднего поля (хотя и в приближении случайных фаз, без должного обоснования), с учетом того что флуктуации над MF взаимодействуют путем как Кулоновского, так и калибровочного CS взаимодействий. Правильность спектров, получаемых в приближении среднего поля кажется на первый взгдяд удивительной, поскольку в этом приближении возникает большая энергия, связанная с эффективной циклотронной частотой, $\hbar\omega_c^* = eH^*/mc$, которая при больших H может превышать энергию кулоновского взаимодействия. Однако, оказалось что эта энергия не влияет на низкочастотную область спектра.

Количественный успех приближения среднего поля в предсказании структуры низкоэнергетического спектра привел Дж-

эйна [6] к предположению о том, что Кулоновское и CS-взаимодействия взаимно компенсируют друг друга, при рассмотрении за пределами приближения среднего поля. Это утверждение, конечно, не может быть справедливым при произвольных значениях магнитного поля H, поскольку они имеют различные энергетические масштабы, с различной зависимостью энергии от поля H.

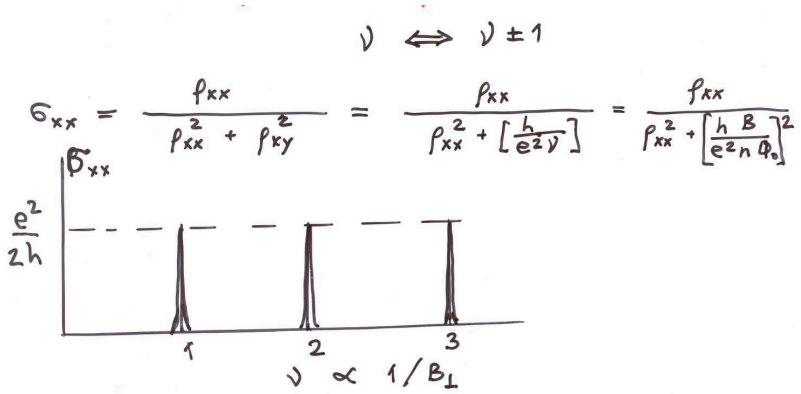
15.1.4 Иерархия CF состояний

Для объяснения последовательность состояний более высокого порядка в FQHE, Халдейн ввел иерархическую схему конденсации [8], в которой Лафлиновские квазичастицы (QP) (сконденсированные из электронов) могли формировать дочерние состояния. В его подходе Лафлиновские QP трактовались как бозоны и снова испытывали корреляции и т.п. В результате получались все дробные состояния с нечетным знаменателем в факторе заполнения. В картине же Джэйна формируется последовательность CF состояний $\nu = q(1+2pq)^{-1}$ [10, 11], где p-положительное целое число и $q = \pm 1, \pm 2, ...$ Джэйновские состояния имеют простой физический смысл - они могут быть рассмотрены как целочисленные квантовохольные состояния для композитных фермионов. Не все дроби из Халдэйновской иерархии появляются в последовательности у Джэйна. Возникает вопрос, какая их двух иерархических схем несжимаемых состояний правильна. Простыми примерами являются состояния $\nu = 4/11$ и $\nu = 4/13$, которое существуют в Халдэйновской схеме, но не могут быть получены как $q(1+2pq)^{-1}$, где p -положительное. Численные расчеты энергетического спектра показали, однако, что не все состояния предсказываемые схемами Халдэйна и Джэйна, в действительности реализуются.

15.1.5 Симметрийные соотношения

Преобразования симметрии в КЭХ

1. Симметрия по добавлению целого числа уровней Ландау



0

Рис. 15.5:

Преобразования симметрии в КЭХ

2. Электрон-дырочная симметрия

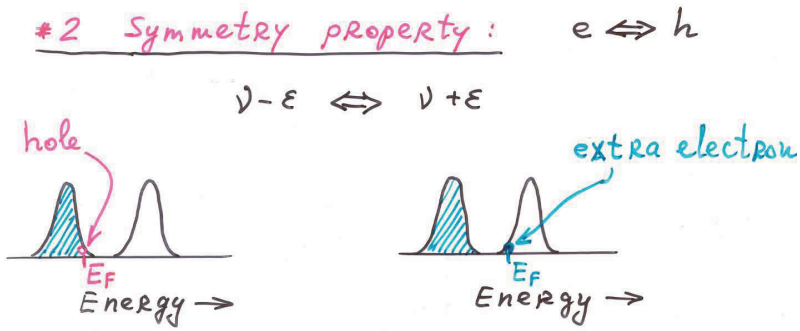
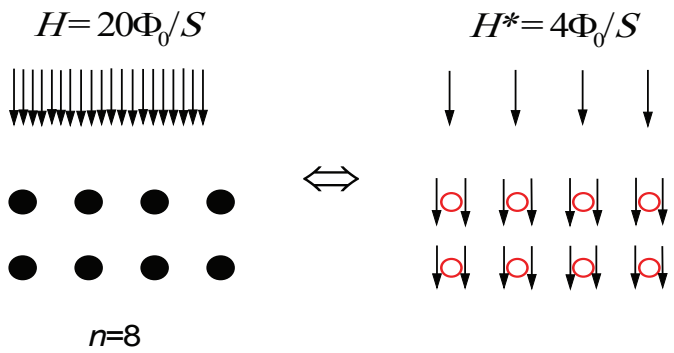


Рис. 15.6:

Преобразования симметрии в КЭХ

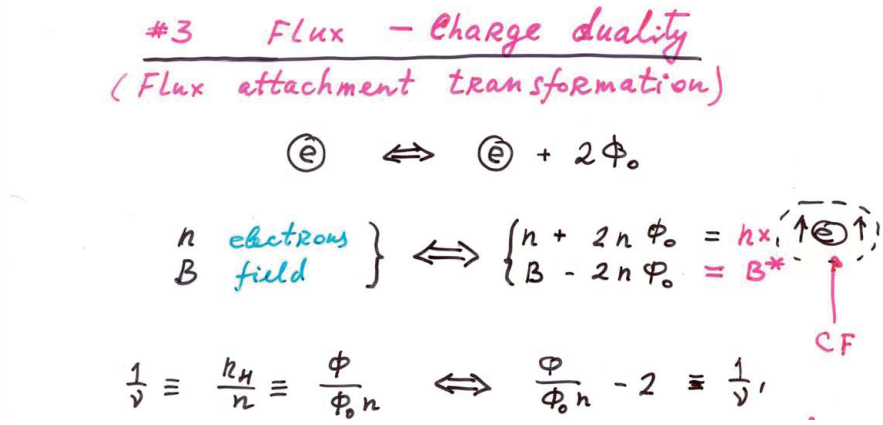
3. Симметрия по присоединению кванта потока

Модельный эксперимент Аронова-Бома



0

Рис. 15.7:



	Электроны		CF	
	$1/\nu$	$\Leftrightarrow$	$1/\nu_{CF} + 2$	
Примеры:	$\nu_e = 1/2$	$\Leftrightarrow$	$\nu_{CF} = \infty$	**(B=0)**
	$\nu_e = 1/3$	$\Leftrightarrow$	$\nu_{CF} = \mathbf{1}$	
	$\nu_e = 2/5$	$\Leftrightarrow$	$\nu_{CF} = \mathbf{2}$	
	$\nu_e = 3/7$	$\Leftrightarrow$	$\nu_{CF} = \mathbf{3}$	

Рис. 15.8:

Литература

[1] M. Janssen,et al. Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect, Ed. J.Haidu,(VSH, Köln 1994).

[2] С. Гирвин, Квантовый эффект Холла, Москва, Ижевск. 2003.

[3] R. E. Prange, Phys. Rev. B **23**, 4802 (1981).

[4] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115** , 485 (1959).

[5] F. Wilczek, Fractional Statistics and Anyon Superconductivity (World Scientific, Singapore, 1990).

[6] J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).

[7] X. M. Chen, J. J. Quinn, Sol.St. Commun. **92**, 865 (1994).

[8] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1983).

[9] Р. Б. Лафлин, Нобелевская лекция по физике, УФН **170**(3), 292 (2000)

[10] J. K. Jain, Phys. Rev. B **40**, 8079 (1989).

[11] J. K. Jain, Phys. Rev. B **41**, 7653 (1990).

[12] J. M. Leinaas, J. Myrheim . "On the theory of identical particles". Il Nuovo Cimento B **37** (1), 1 (1977); doi:10.1007/BF02727953.

[13] F. Wilczek, “Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles”, Phys. Rev. Lett. **49** (14), 957 (1982); doi:10.1103/PhysRevLett.49.957.

[14] S. M. Reimann, M. Manninen, Review Modern Physics **74**, 1283 (2002).

[15] Laughlin, R. B., Phys. Rev. B **27**, 3383 (1983).

[16] Jain, J. K., and T. Kawamura, Europhys. Lett. **29**, 321 (1995).

[17] Manninen, M., S. Viefers, M. Koskinen, and S. M. Reimann, Phys. Rev. B **64**, 245322 (2001).

[18] Y. Ando, J. Phys. Soc. Japan **82**, 102001 (2013).