

## **Лекция 7**

# **Квантовый баллистический транспорт в магнитном поле. Незатухающие токи в мезоскопических кольцах из нормальных металлов**

### **План**

- Незатухающие токи в несверхпроводящих кольцах. Теория
- Эксперимент
- Некоторые комментарии

## 7.1. Введение

В классической электродинамике ток возникает если:

- в образце создано электрическое поле,
- к образцу приложено напряжение,
- магнитное поле изменяется во времени

В мезоскопической структуре кольцевой геометрии постоянный ток может возникнуть в постоянном не зависящем от времени магнитном поле. Т.о. ток становится **термодинамическим равновесным свойством** системы.

Ток, конечно, возникает когда фаза электрона в кольце сохраняется после того как он сделал полный оборот. Это порождает краевые состояния.

Состояния с током - квантовые состояния электронной системы в целом кольце - порождают незатухающий ток.

Значение и направление (знак) тока зависят от формы энергетического спектра и заполнения состояний в спектре. Т.о., на ток будут влиять число электронов в кольце и магнитное поле, пронизывающее кольцо.

## Известные примеры незатухающих токов:

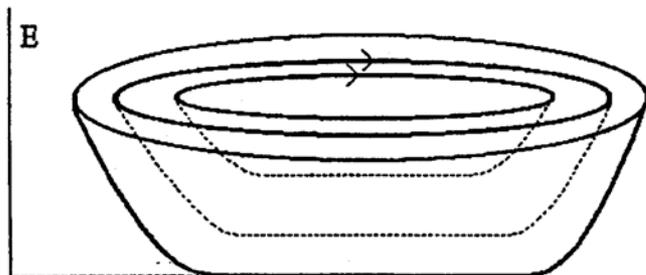
- Электроны на орбите вокруг ядер в атоме, или, например, на гибризированной орбите в молекуле бензола
- Краевые состояния в 2D газе помещенном в перпендикулярное магнитное поле

В последнем случае электроны, распространяющиеся вдоль краев образца в локальном электростатическом поле  $E$  имеют скорость  $\sim v \approx E/B$ , так что каждый из электронов в краевом состоянии вносит вклад в полный ток

$$i = ev/L \approx eE/LB$$

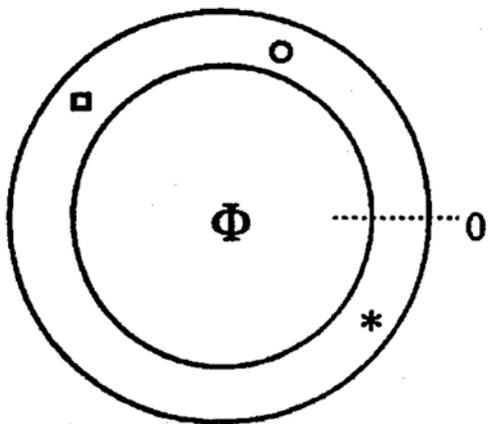
- длина периметра ограничивающего 2D систему.

Краевой ток  $i$  генерирует магнитный момент  $M = iS$ , где  $S$  - площадь 2DEG.



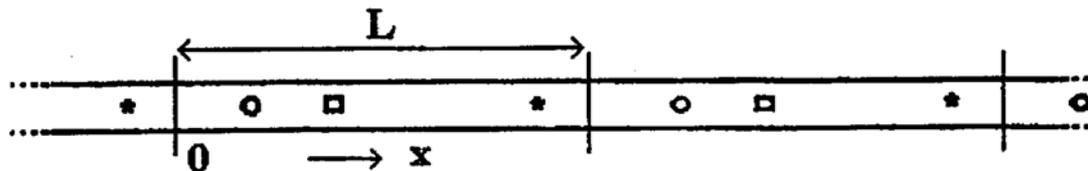
## 7.2. Незатухающие токи в кольце из нормального проводника

Кольцо с периметром  $L = 2\pi R$  в поле  $B$ . В кольце заключен поток  $\Phi$ . Само кольцо настолько узкое, что в нем помещается только одно краевое состояние, т.е. его ширина  $\sim \lambda_F/2$ . Система, т.о., является одномерной.  
Пусть электроны сохраняют свою фазу по крайней мере на длине одного оборота в кольце, т.е.  $L < L_\phi$ .



Кольцо может содержать несколько рассеивателей, которые мы считаем слабыми. Электроны, делающие оборот в кольце, будут на каждом обороте чувствовать один и тот же потенциал. Иначе говоря, они находятся в периодическом потенциале с периодом  $L$ .

Развернем кольцо в полосу из повторяющихся сегментов, каждый длиной  $L$ . Получим искусственную 1D решетку



Вначале предположим, что в кольце нет рассеивателей. Периодическая структура порождает собственные значения  $k$ -векторов ( $p=1, 2, \dots$ ).

$$k_p = \pm p \frac{2\pi}{L}$$

$p$  – маркирует квантовое состояние

Приложим магнитное поле. Оно влияет на фазу электронов через вектор-потенциал. В результате получаются дополнительные сдвиги фаз  $\Delta\varphi$  зависящие от потока через кольцо

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Очевидно, что фазовый сдвиг повлияет на собственные значения волновых векторов, что изменит граничные условия для установления связанного состояния:

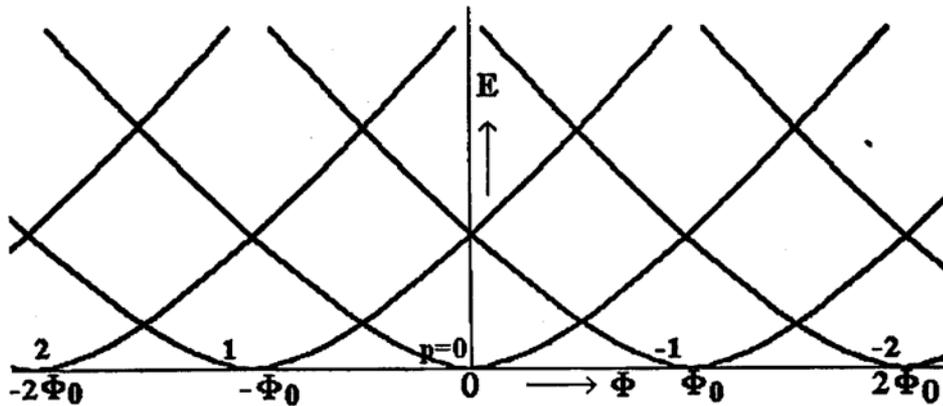
$$k_p(\Phi)L - \Delta\varphi = p2\pi$$

$$k_p(\Phi) = \left( p + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \frac{2\pi}{L}$$

Из этого условия квантования импульса мы получаем скорость и кин. энергию состояний с квантовым числом  $p$ :

$$v_p(\Phi) = \frac{\hbar}{m} \left( p + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \frac{2\pi}{L}$$

$$E_p(\Phi) = \frac{\hbar^2}{2m} k_p^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4\pi^2}{L^2} \left( p + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$



Квантовое число  $p$  маркирует ветви последовательных парабол.

Диаграмма, конечно, периодична по потоку, заключенному в кольцо, с периодом кванта потока.

Видна похожесть на зависимость  $E(k)$  в обычном случае движения электрона в периодической решетке в кристалле.

Ток, переносимый циркулирующими в кольце электронами, из соображений размерности, равен

$$i_p = \frac{dQ}{dt} = \frac{-e}{L/v_p} = -\frac{ev_p}{L}. \quad (7.8)$$

$$i_p = \frac{dQ}{dt} = \frac{-e}{L/v_p} = -\frac{ev_p}{L}. \quad (7.8)$$

Конечно, этот ток можно получить более строго. Для этого вначале вычислим

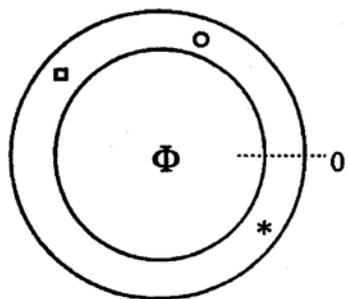
$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\Phi} = \frac{\hbar^2}{m} k_p \frac{2\pi}{L\Phi_0} = \frac{h}{L\Phi_0} v_p = \frac{e}{L} v_p(\Phi) \quad (7.9)$$

Правые части выражений (7.8) и (7.9) равны, поэтому

$$i_p = -\frac{d\mathcal{E}_p}{d\Phi} \quad (7.10)$$

Мы получили хорошо известное термодинамическое соотношение Максвелла между магнитным моментом  $M = iS$  и производной от свободной энергии Гиббса по магнитному полю  $B = \Phi/S$  ( $S$ - площадь кольца). Ток  $i_p$  - это ток вносимый одним электроном в данном состоянии с квантовым числом  $p$ . При малом поле спиновое вырождение не снимается и учет спинового фактора удваивает количество электронов и ток для данного индекса  $p$  в выражении (7.10) надо удвоить.

**Учет рассеяния.** Прежде чем выяснить как вклад отдельных электронов суммируется в полный ток в кольце, обсудим влияние рассеяния электронов в кольце



Каждая примесь вносит постоянный локализованный в пространстве потенциал. Для электронов циркулирующих в кольце потенциал рассеивателей в кольце является периодическим. Ненулевой периодический потенциал приводит к Брэгговскому отражению электронных волн и возникновению щелей в спектре и зон.

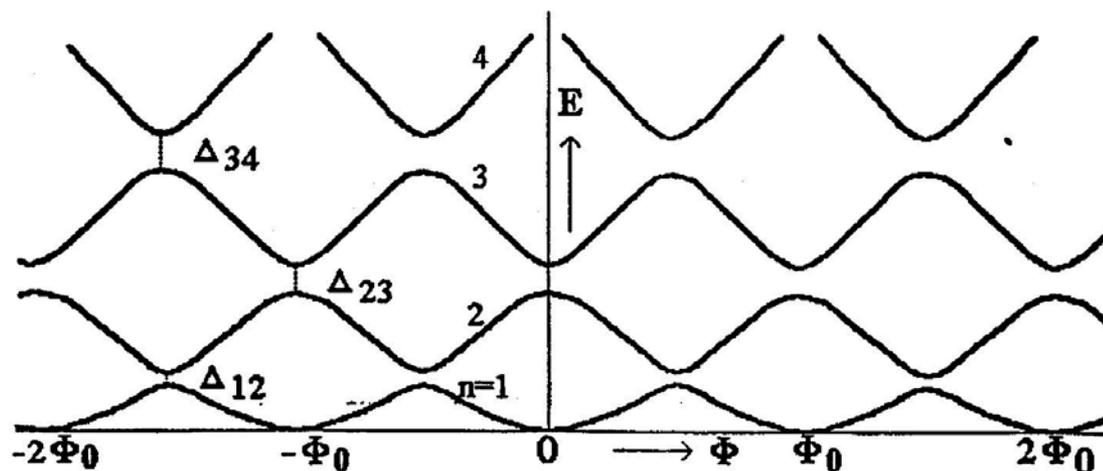


Рис. 7.5:  $\mathcal{E} - \Phi$  диаграмма для электронных состояний в 1D кольце с рассеивателями

Buttiker (1983) первым понял эффект упругого рассеяния как действие периодического потенциала в одномерном кольце. В возникших энергетических зонах действует новый набор квантовых чисел  $n$ , которые нумеруют зоны. Щель может быть просто оценена из потенциала  $V(x)$  вдоль кольца ( $x$  - текущая координата вдоль кольца). Поскольку  $V(x) = V(x+L)$  - периодический потенциал, то его можно разложить в ряд Фурье по волновым векторам обратной решетки

$$V(x) = \sum_{k_p} U_k \exp(ik_p r) \quad (7.11)$$

Это позволяет оценить величину щели :

$$\Delta_{12} = 2U_1, \quad \Delta_{23} = 2U_2, \dots \quad (7.12)$$

Т.о. сильные вариации потенциала  $V(x)$  приводят к увеличению щелей в спектре и сужению зон. Иными словами, усиление беспорядка (или уменьшение длины свободного пробега) ведет к увеличению щелей и сужению зон. Это есть общее явление- постепенный переход от свободных электронов к режиму сильной связи с сильным рассеянием электронов приводит к усилению локализации электронов, снижению средней скорости электронных состояний, т.е. тока.

**Найдем полный ток в кольце.** Для этого просуммируем индивидуальные токи в каждой из подзон. В случае простой параболы (чистый случай, нет рассеяния) каждое состояние содержит максимум два электрона (с учетом спина). Эквивалентно этому, в случае с рассеивателями, каждая зона может вместить максимум два электрона. Т.о. мы положим, что в кольце имеются  $2N$  электронов, заполняющих  $N$  зон ( $n = 1, 2, \dots, N$ ).

Из рисунка видно, что максимальный ток (т.е. максимум производной  $dE/d\Phi$ ) достигается в точках  $\Phi = \Phi_0/4$ . Для случая слабого беспорядка (малые щели) типичная величина максимального тока в зоне  $n$  может быть получена из выражений (7.5), (7.7) и (7.10)

$$i_n = (-1)^n g_s \frac{eh}{m} \frac{1}{L^2} [(n - 1) + 1/4] \quad (7.13)$$

Префактор  $(-1)^n$ , учитывающий знак  $dE/d\Phi$ , попеременно меняет знак с квантовым номером зоны. В результате, при суммировании токи сокращаются и полная сумма становится примерно равной вкладу одной зоны - наивысшей по энергии зоны с индексом  $N$ .

Получаем для полного тока

$$|I_N| = -\frac{d\mathcal{E}}{d\Phi} \sim \frac{E_F e}{N h} = \frac{ev_F}{L} \quad (7.14)$$

поскольку  $E = pv/2 = hNv/2L$ , и  $v = \hbar k/m = hN/mL$ .

**Q1:** Почему тут и ранее  $L$  оказывается в знаменателе ?

**A1:** Потому что мы должны среднюю скорость электронов помножить на их плотность в кольце, т.е. обратное расстояние между электронами в кольце. А расстояние между электронами для одной моды равно длине периметра  $L$ .

**Q2:** Вычислить ток в кольце радиуса  $r = 0.15\text{мкм}$  в приближении слабого рассеяния.

**A1:** 1 мкм.

**A1:** Потому что мы должны среднюю скорость электронов помножить на их плотность в кольце, т.е. обратное расстояние между электронами в кольце. А расстояние между электронами для одной моды равно длине периметра  $L$ .

**Q2:** Вычислить ток в кольце радиуса  $r = 0.15\text{мкм}$  в приближении слабого рассеяния.

### 7.2.2 Рассеяние электронов в кольце

При суммировании токи от разных подзон в основном сокращаются, и это не зависит от силы рассеяния. Пользуясь выражением (7.10) и если известна зонная структура, можно вычислить ток для любой степени беспорядка.

**Что будет с током если увеличивать беспорядок в кольце?** Из (7.10) следует, что увеличение рассеяния приводит к увеличению щели и сужению зон. Более узкие зоны будут иметь меньший наклон  $dE/d\Phi$ , что приведет к уменьшению тока, приходящегося на зону. Т.о. уменьшится и суммарный ток от всех зон, по сравнению со своим свободно-электронным значением.

Для грубой оценки влияния рассеяния на незатухающий ток, не нужно вычислять зонную структуру для разупорядоченного кольца. Увеличение беспорядка в кольце преобразует баллистический транспорт в диффузионный, когда длина упругого пробега  $l_e$  станет меньше периметра кольца  $L$ .

Для полоски размера  $L$  несущей  $N_{ch}$  мод можно найти проводимость в рамках модели Друде

$$\sigma_D = g_s \frac{e^2}{h} N_{ch} \frac{l_e}{L} \quad (7.15)$$

**Докажем это:** Рассмотрим диффузионное движение. Введем  $\tau$ -время релаксации импульса. На электрон действует сила  $eE$  и он набирает скорость  $\langle v(t) \rangle = -eEt/m$ . За время между столкновениями  $\tau$  достигается средняя скорость в ансамбле (дрейфовая скорость)

$$\bar{v}_d \equiv \langle \bar{v}(\tau) \rangle = -\frac{e}{m} \bar{E} \tau \equiv -\mu \bar{E}, \quad (7.16)$$

где подвижность электронов  $\mu = e\tau/m$ . Получаем для проводимости системы (со скоростью  $\langle v \rangle = -eE\tau/m$ ).

$$\sigma = \frac{\bar{j}}{\bar{E}} = -\frac{en_e \langle \bar{v} \rangle}{\bar{E}} = \frac{e^2 n_e \tau}{m} = -ne\mu, \quad (7.17)$$

где  $j$ -плотность тока. Мы вывели Друде выражение для проводимости. Теперь вспомним, что в 2D случае

$$n_e = \frac{g_s}{4\pi} k_F^2, \quad (7.18)$$

где  $g_s = 2$ . Средняя длина пробега

$$l = v_F \tau = \frac{\hbar k_F}{m} \tau. \quad (7.19)$$

Комбинируя два последних выражения получаем

$$\sigma_{2D} = g_s \frac{e^2}{h} \frac{k_F l}{2} = \frac{2e^2}{h} \frac{\pi l}{\lambda_F} \approx \frac{2e^2}{h} \frac{l_e}{d_{e,e}}, \quad (7.20)$$

где  $d_{e,e} \sim \lambda_F$  – среднее расстояние между электронами.

Вернемся к рассмотрению влияния рассеяния на незатухающий ток в кольце. Мы нашли фактор  $l_e/L$ , уменьшающий проводимость по сравнению с идеальным баллистическим случаем.

Заметим, что уменьшение проводимости связано с упругими бездиссипативными процессами и следовательно не нарушает фазовую когерентность электронов в кольце!

Этот же фактор надо подставить в оценку величины незатухающего тока, когда мы переходим от результата (7.13) в баллистическом режиме к диффузионному режиму.

$$i_n = (-1)^n \frac{l_e}{L} \frac{eh}{m} \frac{1}{L^2} ((n-1) + 1/4) \quad (7.21)$$

Конечно, этот результат - описание влияния упругого рассеяния на незатухающий ток в кольце - это лишь грубая оценка в первом приближении. Это влияние может стать более сложным для случая нескольких каналов.

Другой тип рассеяния – **неупругие процессы**. Мы здесь немного забегаем вперед, поскольку еще не рассматривали диффузионный предел и сбой фазы.

Неупругое рассеяние уменьшает длину фазовой когерентности  $l_\varphi$  и время сбоя фазы  $\tau_\varphi$  и следовательно уменьшает время жизни квантового состояния в кольце. Это приводит к уширению уровней энергии собственных состояний. Если уширение становится равным (точнее, сравнимым) типичному расстоянию между уровнями, то зонная структура будет разрушена и незатухающие токи значительно подавлены. Это подавление в диффузионном пределе описывается экспоненциальным фактором

$$i_n = i_0 \exp\left(-\frac{L}{l_\varphi}\right) \quad (7.22)$$

**Перейдем к экспериментам** и проверим все эти теоретические песни

**План:**

- (1) вначале оценим величину токов, а затем
- (2) обсудим как их измерить.

Рассмотрим кольцо с периметром длиной  $L = 1$  мкм и шириной  $0.1$  мкм, изготовленное напылением металла, с типичной толщиной металлической пленки  $100$  нм (вопрос - как на глаз оценить толщину металлической пленки). Кольцо из такой пленки содержит (**Q**: сколько ? ) электронов.

Пленка напылена на непроводящую подложку. Интерфейс подложка-пленка изготовлен оптически-гладким. Он, однако, не гладок по сравнению с  $\lambda_F$ . Эта шероховатость приводит к диффузионному **упругому** отражению электронов

(Q – почему ?).

Толщина пленки, следовательно, ограничивает упругую длину фактором порядка  $le/L = 10$ . Поэтому ожидаемый незатухающий ток в диффузионном режиме равен не 1мкА, а  $\sim 0.1$ мкА.

Этот ток не только мал, но и его принципиально трудно измерить - если мы разорвем кольцо и подсоединим амперметр, то незатухающий ток исчезнет (Q - почему?). Единственный способ – измерять магнитный момент тока  $M = iS$  с помощью СКВИД- магнитометра. Возникает вопрос - как увеличить магнитный момент.

На первый взгляд, есть два пути

– (i) сделать массив из колец, (ii) использовать кольцо, содержащее более одного канала.

Оба пути экспериментально проверяли. Helen Bouchiat (1989) использовала 10 каналов, Chandrasekhar (1991) использовал  $10^5$  мод. Maily (1993) использовал полупроводниковое кольцо в баллистическом режиме, в котором имелось 8 мод. Levy (1990) использовал  $10^7$  металлических колец.

### Многоканальное кольцо

Рассмотрим вначале кольцо большой ширины, содержащее более одного канала -  $M$ -каналов, нумеруемых  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Если упругое рассеяние отсутствует, то  $M$  каналов живут совершенно независимо и каждый из них образует сеть зон.

Пусть мода с номером  $m$  содержит  $N_m$  заполненных зон, т.е.  $E(N_m) = E_F$  и, соответственно,  $E(N_{m+1}) > E_F$ . Из-за независимости мод (краевых состояний) возникнет многоканальный аналог зонной сетки Рис. 7.4, в которой теперь каждый канал даст свой набор парабол и, конечно, периодичных по  $\Phi_0$ .

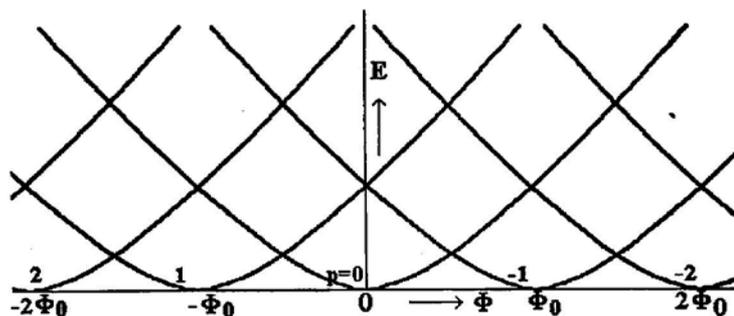


Рис. 7.4:  $\mathcal{E} - \Phi$  диаграмма для электронных состояний в 1D кольце

Однако, каждый из наборов будет иметь свое дно, энергия которого  $E_{m,0}$  монотонно увеличивается с номером зоны  $m$  и определяется как обычно квантованием вектора  $k_m$  в перпендикулярном направлении. Для каждой подзоны  $m$ , содержащей  $N_m$  заполненных зон, ток в расчете на одно состояние может быть вычислен по формуле (7.10) (повторим ее),

$$i_p = -\frac{d\mathcal{E}_p}{d\Phi}$$

а полный результирующий ток на одну подзону может быть вычислен по формуле (7.14). Повторим ее

$$|I_N| = -\frac{d\mathcal{E}}{d\Phi} \sim \frac{E_F e}{N h} = \frac{ev_F}{L}$$

Для того, чтобы вычислить полный ток надо просуммировать вклады от всех подзон. При суммировании опять будут взаимно сокращаться члены, но теперь уже знакопеременность будет описываться фактором  $(-1)^{Nm}$ , который будет случайным образом менять знак для каждого канала с

с  $N_m$  заполненными подзонами. Вследствие этого, результирующая сумма будет опять будет похожа на последнее выражение (7.14), т.е.  $\sim (ev_{\max}/L)$ , где  $v_{\max}$  обозначает скорость наивысшего по энергии заполненного состояния наинизшей подзоны. Иначе говоря, состояния с наибольшей кинэнергией (или скоростью).

Т.о. при увеличении ширины кольца в нем помещается более одного канала.

**Это, однако, не увеличивает полный результирующий незатухающий ток в кольце, несмотря на увеличение числа электронов в системе!**

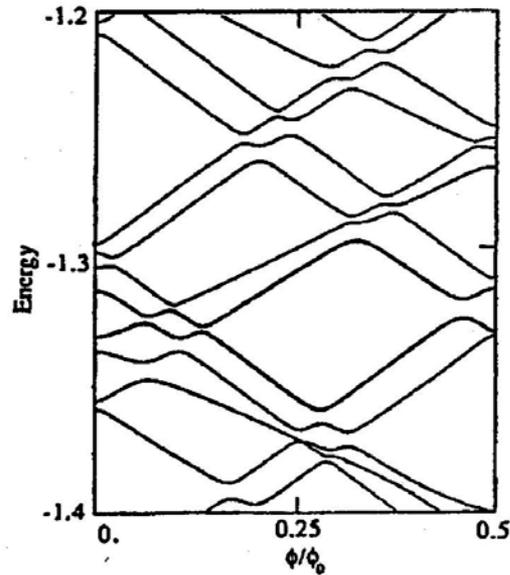


Рис. 7.6: Часть  $\mathcal{E} - \Phi$ -диаграммы для кольца (в пределе слабого рассеяния), содержащего  $M = 10$  каналов (или подзон). -

Пример расчета структуры зоны с 10 подзонами. Показан только участок  $0 - \Phi_0/2$ , поскольку ток симметричен относительно  $\Phi = 0$  и периодичен с периодом  $\Phi_0$ . На диаграмме щели маленькие, что говорит о малости беспорядка в кольце.

**Ни одна ветвь не пересекает другую.** Щели заставляют ветви избегать друг друга. Это прямо называть “отталкиванием” уровней. Наличие щелей приводит также к тому, что максимальный наклон (и максимальный ток) не достигаются теперь при  $\Phi_0/4$ .

## **Вторая возможность увеличения полного магнитного момента: путем увеличения числа номинально идентичных колец.**

У нас снова возникнет периодичность не  $\Phi_0$ , а  $\Phi_0/2$ , также как и в А-А-С и А-Б эффекте с многокольцевой конфигурацией.

Здесь мы снова столкнемся с проблемой уполовинения периода, т.е. периодичности по  $\Phi_0/2$  аналогично осцилляциям АБ-ААС.

Металлические кольца микронного диаметра обычно содержат  $\sim 10^6 - 10^7$  электронов. Если изготавливается ансамбль номинально идентичных колец, число электронов в каждом из них может быть существенно разным. Вариации в размерах на 1% дадут отличие числа электронов в кольцах в  $10^4 - 10^5$  штук.

Кроме того, положения и количество рассеивателей в кольцах могут быть разными и следовательно зонный спектр и щели будут отличаться.

Мы уже видели, что разница в 1 электрон может привести к изменению знака тока.

Рассмотрим процесс намагничивания ансамбля колец. Пусть у нас имеются 3 кольца с номинальным размером  $L$  каждое. Обозначим их номера  $r = 1, 2, 3$  и число электронов в каждом  $N_r$ . Предположим также для простоты, что первое кольцо содержит 1 электрон  $N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 3$ . Игнорируем спин,  $g_s = 1$ .

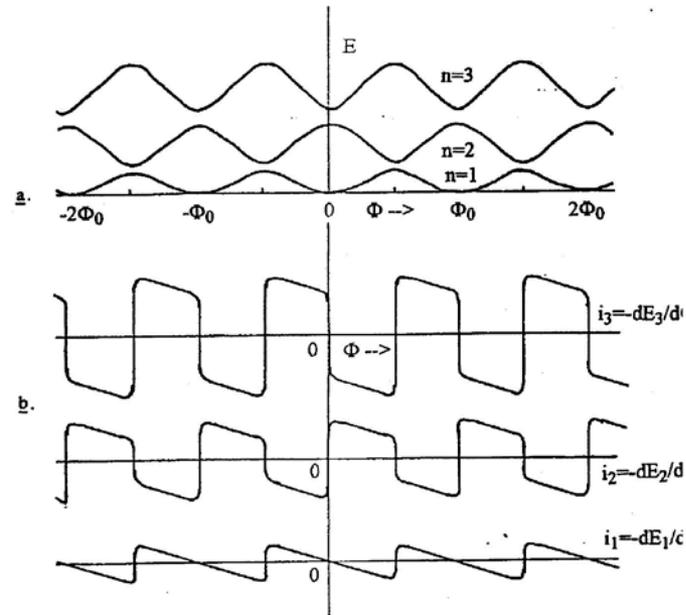


Рис. 7.7: Незатухающие токи в модельном ансамбле из 3х колец, содержащих 1, 2, и 3 электрона, соответственно. (а) Энергетическая диаграмма с тремя зонами. Для кольца с тремя электронами все три зоны заполнены. (б) Производная от энергии по потоку  $dE/d\Phi$  для каждой из зон, дающая незатухающий ток на заполненную зону.

Рисунок 7.7 показывает результирующую зонную структуру  $E-\Phi$ .

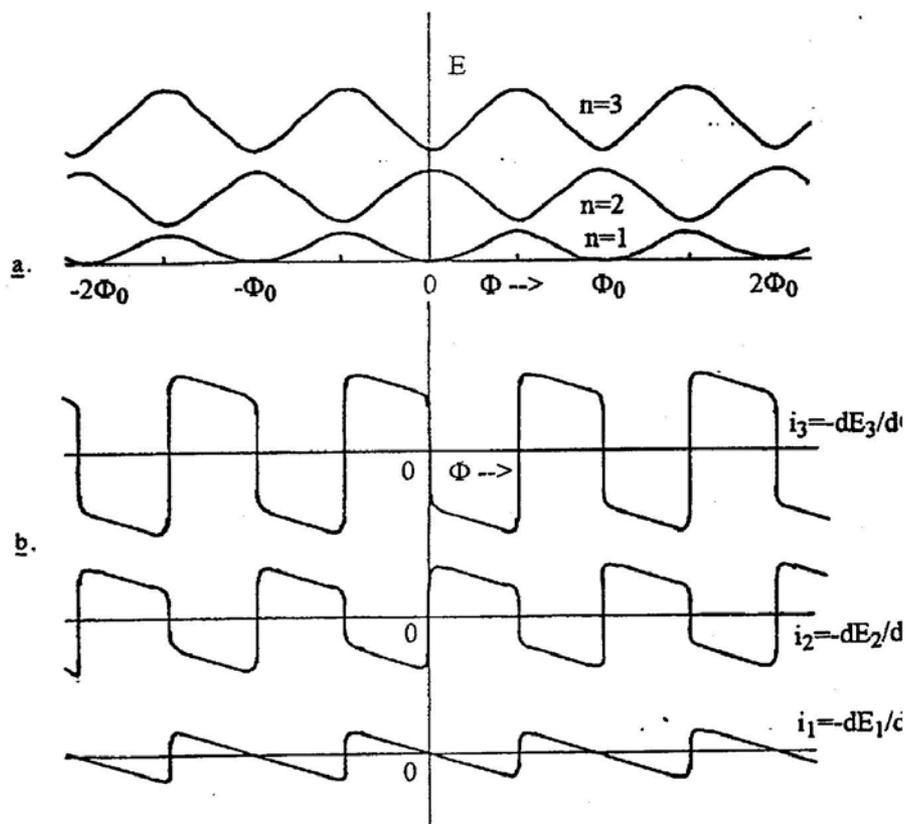


Рис. 7.7: Незатухающие токи в модельном ансамбле из 3х колец, содержащих 1, 2, и 3 электрона, соответственно. (а) Энергетическая диаграмма с тремя зонами. Для кольца с тремя электронами все три зоны заполнены. (б) Производная от энергии по потоку  $dE/d\Phi$  для каждой из зон, дающая незатухающий ток на заполненную зону.

Детали диаграммы (например, величины щелей) для колец 1-3 могут быть различными, но глобальная форма должна быть похожей. Вычислим полный ток  $I_r = \sum_n i(r, n)$  для трех колец  $r = 1, 2, R(R = 3)$  и среднее значение для трех колец - см. Рис. 7.8  $\langle I_R \rangle = (I_1 + I_2 + I_3)/R$

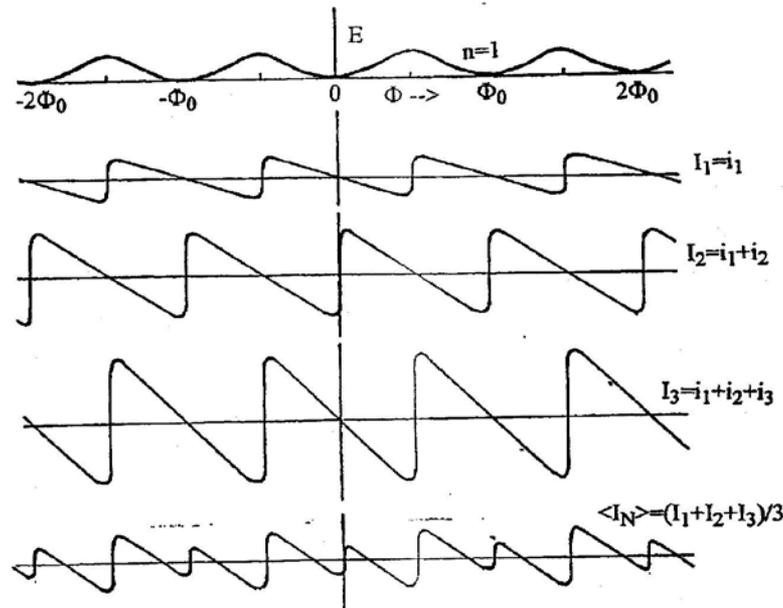


Рис. 7.8: Вычисленный полный незатухающий ток для каждого кольца и среднее значение тока  $\langle I_3 \rangle$  в системе из трех колец

Хорошо видно, что полный ток демонстрирует уполовинение периода, т.е. периодичность  $\Phi_0/2$ , поскольку максимумы тока отвечают условию  $\Phi_0/4$ . Этот половинный период является характерным для усреднения по ансамблю из большого числа колец.

Оценим теперь магнитный момент вследствие незатухающих циркулирующих токов в системе из трех колец. Если  $S$  - площадь, то  $M = S(I_1 + I_2 + I_3) = S \times R \times \langle IR \rangle$ . Видно, во первых, что полный магнитный момент масштабируется линейно с числом колец. Следовательно, в эксперименте выгодно использовать большое число колец. Во вторых полный сигнал ансамбля номинально равных колец показывает уполовинивание периода, в противоположность одиночному кольцу, в котором период осцилляций равен  $\Phi_0$ . Уполовинивание становится тем более выраженным, чем больше усредняемое число колец  $R$  в ансамбле.

Рисунок 7.9 показывает результаты расчета для набора колец в пределе слабого беспорядка. Число заполненных зон в индивидуальных кольцах равномерно распределено в пределах от 150 до 250 [H.Bouchiat et al.]. Ясно, что в этом более реалистичном случае (чем для искусственной модели из трех колец) период уполовинивается; следовательно, это явление имеет общую природу.

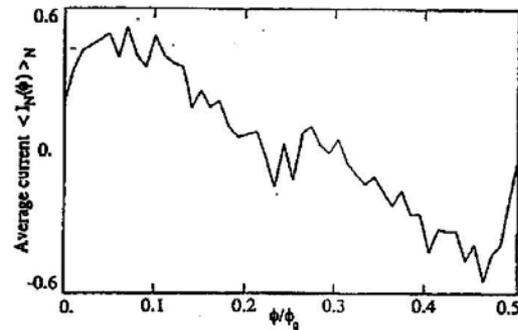


Рис. 7.9: Средний незатухающий ток для большого ансамбля из подобных колец. Число заполненных зон  $N_f$  в индивидуальных кольцах равномерно распределено в пределах от 150 до 250.