

Глава 21

Задачи

1. Задание из Лекции 19.1-2. Вывести

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_T - T \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_T. \quad (21.1)$$

2. Задание из Лекции 19.1-2. Вывести

$$C_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_\mu \quad (21.2)$$

3. Задание из Лекции 19.1-2. Вывести связь сжимаемости ферми-системы и термодинамической плотности состояний

$$\frac{1}{\kappa} = N\rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_\Omega. \quad (21.3)$$

4. Задание из Лекции 19.2. Вычислить спиновую восприимчивость

$$\chi_P = \frac{M}{\Omega H} = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\mu_B^2}{1 + F_0^a} \quad (21.4)$$

без помощи величины $\tilde{\delta}n_p$, т.е. учитывая явно изменение энергии КЧ вследствие намагничивания.

5. **Задание из Лекции 19.2-4.** Вывести дисперсионное уравнение для нулевого звука

$$\frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} - 1 = \frac{1}{F_0} \quad (21.5)$$

6. **Задание из Лекции 19.2-4.** Вычислить члены первого порядка в разложении амплитуды рассеяния $\mathcal{A}_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ по степеням qv_F/ω или ω/qv_F .
7. **Задание из Лекции 19.5.** Показать, что при $q \rightarrow 0$ продольное решение уравнения (19.68) имеет частоту ω_p .
8. **Задание из Лекции 19.5.** Вычислить коэффициент диффузии D для электронной системы. Сравнить результаты с результатами обычной кинетической теории.
9. **Задание из Лекции 19.5.** Вычислить теплопроводность κ и проверить закон Видемана-Франца.
10. **Задание из Лекции 19.5.** Вычислить с помощью теории Ландау-Силина диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ в предположении, что взаимодействие не зависит от импульсов: $F_{pp'} = F_0$. Построить графики зависимости $\text{Im} \varepsilon$ и $\text{Re} \varepsilon$ от ω/qv_F .
11. **Задание из Лекции 20.1.** Показать, что уравнения Хартри следуют из минимизации Ур. (20.31) по всем функциям Ψ вида

$$\Psi(\mathbf{r}_1 s_1, \dots, \mathbf{r}_N s_N) = \prod_{i=1}^N \psi_i(r_i s_i), \quad (21.6)$$

12. **Задание из Лекции 20.1.** Минимизируя Ур. (20.37) по отношению к ψ_i^* получить уравнения Хартри-Фока, (20.38)
13. **Задание из Лекции 20.1.** Вычислить обменный член (20.42), записав кулоновское взаимодействие через фурье-образ (20.40).
14. **Задание из Лекции 20.2.** Выполняя обратное разложение Фурье получить (20.28) из (20.27)
15. **Задание из Лекции 20.2.** Вывести соотношение (20.33)
16. **Задание из Лекции 20.2.** Вывести соотношение (20.40)
17. **Задача 3 из Лекции 20.2.**

Исходя из интегрального представления δ - функции

$$\delta(\mathbf{r}) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (21.7)$$

а также из того, что кулоновский потенциал $\phi(r) = -1/r$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -4\pi e\delta(\mathbf{r})$$

доказать что:

(а) парный потенциал е-е взаимодействия $V(r) = -e\phi(r) = e^2/r$ можно выразить в виде

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{k}), \quad (21.8)$$

где фурье-образ $V(\mathbf{k})$ дается выражением

$$V(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{k^2}$$

(b) фурье-образ экранированного кулоновского взаимодействия $V_s(\mathbf{r}) = (e^2/r)e^{-k_0 r}$ есть

$$V_s(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{k^2 + k_{\text{TF}}^2}. \quad (21.9)$$

(c) Исходя из выражения (21.9) показать, что $V_s(r)$ удовлетворяет уравнению

$$(-\nabla^2 + k_{\text{TF}}^2)V_s(r) = 4\pi e^2 \delta(r). \quad (21.10)$$

18. Задача 5 из Лекции 20.2.

Вывести соотношение (20.33)

19. Задача 6 из Лекции 20.2.

Взяв предел $q \rightarrow 0$ в формуле Линдхарда получить связь между $\epsilon(0, \omega)$ и плазменной частотой (20.40).

20. Задача 7 из Лекции 20.2.

Рассмотреть статический предел ($\omega + i\delta \rightarrow 0$) и вывести формулу (20.25) из формулы Линдхарда (20.37)

21. Задача 8 из Лекции 20.2.

Найти статический предел из формулы Линдхарда для 2D случая. Показать, что волновой вектор экранирования есть (20.43).

22. Задача 1 из Лекции 20.3. Доказать, что для фермионов оператор чисел заполнения:

$$c_i^+ c_i = \hat{n}_i \quad (21.11)$$

23. Задача 2 из Лекции 20.3. Доказать Ур. (20.53)

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_i \rightarrow \beta, \dots, \alpha_N\rangle = c_\beta^+ c_{\alpha_1} |\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_N\rangle \quad (21.12)$$

24. **Задача 0 из Лекции 20.4.** Выписать $\delta\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ (20.17).
25. **Задача 1 из Лекции 20.4.** Кинетическая жесткость.
Используя статическую теорию возмущений во втором порядке вывести выражение (20.23) для увеличения кинетической энергии невзаимодействующего электронного газа при наличии статического периодического потенциала (20.15)
26. **Задача 2 из Лекции 20.4.** Зависящий от времени отклик первого порядка в плотности.
Вывести линейный отклик плотности /формула (20.26) из нестационарной теории возмущений в первом порядке.
27. **Задача 3 из Лекции 20.4.** Низкочастотная проводимость изоляторов.
Используя основополагающие соотношения классического электромагнетизма в макроскопических средах, доказать, что динамическая проводимость изотропного изолятора должна исчезать в нуль как $\sigma(\omega) \propto 4\pi i\omega\epsilon$, при $\omega \rightarrow 0$, где ϵ – статическая диэлектрическая проницаемость вещества.