

## Глава 20

Микроскопическая теория  $e$ - $e$   
взаимодействия.

Часть 5



# Оглавление

<b>20 Микроскопическая теория e-e взаимодействия.</b>	
<b>Часть 5</b>	<b>1</b>
20.0.1 Поправка Хаббарда . . . . .	4
20.1 Функция отклика ток-ток . . . . .	5
20.1.1 Гамильтониан возмущения . . . . .	7
20.1.2 Формула Кубо-Гринвуда . . . . .	8
20.1.3 Более строгое рассмотрение . . . . .	10
20.1.4 Калибровочная инвариантность . . . . .	13
20.1.5 Электропроводность . . . . .	15
20.1.6 Вывод формулы Друде . . . . .	17
20.1.7 Эффекты взаимодействия в Холловской проводимости в слабом перпендикулярном поле . . . . .	19
20.1.8 Температурная зависимость времени упру- гой релаксации в 2D электронных системах	20
20.2 Измерения перенормировки спиновой восприим- чивости . . . . .	30
20.2.1 Определение $F_0^a$ из биений квантовых ос- цилляций . . . . .	31
20.3 А что остается за бортом ? . . . . .	36
20.3.1 Приложение 1. Задачи . . . . .	38

В этой Лекции вначале излагаются сведения дополняющие Лекции 20.2 – 20.4 по теории экранирования и линейного отклика в различных приближениях. Затем описываются проявления эффектов взаимодействия в низкотемпературном транспорте заряда и термодинамике низкоразмерных электронных систем

### 20.0.1 Поправка Хаббарда

При высоких плотностях электронной системы (малые  $r_s$ ) основной вклад в корреляционную энергию обусловлен процессами с малыми передачами импульса. Для этих процессов результаты, полученные в приближении RPA, должны быть довольно точными, поскольку предположение о динамическом экранировании квазичастиц, на характерных расстояниях много больше обратного фермиевского импульса, выполняется хорошо. Однако по мере увеличения  $r_s$  становятся заметными процессы передачи импульса порядка фермиевского. Ясно, что потенциал на расстояниях, сравнимых с межчастичным будет экранироваться плохо. Приближенное выражение, описывающее процесс ухудшения экранирования при больших передачах импульса, было предложено Хаббардом:

$$\chi_{\text{scr}}^{\text{H}}(\mathbf{q}, \omega) = \chi^0(\mathbf{q}, \omega) \left[ 1 + G(q) \frac{4\pi e^2}{q^2 \chi^0(\mathbf{q}, \omega)} \right]^{-1} \quad (20.1)$$

Сравним это с формулами (20.30) и (20.29) из Лекции 20.4 (повторю их еще раз)

$$\chi_{\text{scr}}(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon(\mathbf{q}, \omega) \chi(\mathbf{q}, \omega), \quad (20.2)$$

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^{\text{scr}}(\mathbf{q}, \omega), \quad (20.3)$$

где  $\chi_{\text{scr}}$  - функция реакции плотность-плотность на экранированном поле и  $\chi_{\text{scr}}^{\text{H}}(\mathbf{q}, \omega) = \chi^0(\mathbf{q}, \omega)$ .

Видим, что в (20.1) введена функция  $G(\mathbf{q})$ , описывающая так называемые поправки на локальное поле (local field corrections, LFC). Хаббардом был предложен следующий вид этой функции для 3D электронных систем:

$$G(q) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{(q^2 + p_F^2)}. \quad (20.4)$$

Она имеет правильные асимптотики при  $q \ll p_F$  и  $q \gg p_F$ . С помощью (20.1) и (20.3) легко вычислить исправленную функцию реакции плотность-плотность

$$\chi^{\text{H}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\chi^0(\mathbf{q}, \omega)}{\left[1 - G(q) \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0(\mathbf{q}, \omega)\right]}. \quad (20.5)$$

После Хаббарда предлагались и другие подобные поправки на локальное поле. Считается, что использование такого рода поправок позволяет приблизиться к  $r_s = 1$  и даже продвинуться в область  $r_s \geq 1$ . Для 2D систем Хаббардовская поправка имеет вид:

$$G(q) = \frac{1}{2g_v} \frac{q}{\sqrt{q^2 + p_F^2}}, \quad (20.6)$$

где  $g_v$  - число эквивалентных долин в спектре.

## 20.1 Функция отклика ток-ток

Ранее мы рассматривали функцию отклика плотность-плотность и находили с ее помощью энергию основного состояния. Теперь мы перейдем к другому очень важному применению формализма: вычислению отклика по току и плотности однородной

электронной жидкости, подвергнутой воздействию векторного потенциала  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Из классической электродинамики хорошо известно, что электромагнитное поле может быть представлено в терминах скалярного потенциала  $\phi$  и векторного потенциала  $\vec{A}$  в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (20.7)$$

Эти формулы инвариантны относительно калибровочного преобразования

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &\rightarrow \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Lambda}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \vec{\Lambda}(\vec{r}, t),\end{aligned}\quad (20.8)$$

где  $\vec{\Lambda}(\vec{r}, t)$  - дифференцируемая, но произвольная функция от  $\vec{r}$  и  $t$ . Часто можно воспользоваться свободой выбора и сопоставить данную проблему с эквивалентной, которая легче поддается решению или предлагает другие идеи. Например, скалярный потенциал  $V(\vec{r}, t) = e\phi(\vec{r}, t)$  всегда может быть устранен соответствующим выбором  $\Lambda(\vec{r}, t)$ . Это преобразование приводит к появлению векторного потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{c}{e} \int_0^t \vec{\nabla} V(\vec{r}, t') dt' \quad (20.9)$$

Таким образом, задача вычисления отклика системы на скалярный потенциал преобразуется в задачу вычисления отклика той же системы на особый тип векторного потенциала, а именно на тот, который может быть записан через градиент

скалярной функции. Такое векторное поле называется продольным, потому что его преобразование Фурье,  $\vec{A}(\vec{q})$ , параллельно  $\vec{q}$  для каждого  $\vec{q}$ . Существуют также поперечные векторные потенциалы (например, те, которые используются для описания статического магнитного поля), преобразование Фурье которого перпендикулярно  $\vec{q}$  для каждого  $\vec{q}$ . Наиболее общее векторное поле не является ни продольным, ни поперечным, но может быть записано как суперпозиция двух видов полей. Здесь мы рассматриваем реакцию электронной жидкости на такое общее поле.

### 20.1.1 Гамильтониан возмущения

Отклик ферми систем на однородное электрическое поле мы рассматривали ранее неоднократно и в различных приближениях. Здесь мы несколько изменим подход к отклику на однородное статическое поле, а именно, будем рассматривать статическое поле, как предел переменного поля при частоте, стремящейся в нуль. С этой целью прежде всего перепишем гамильтониан возмущения, причем сделаем жто в два приема - вначале на качественном уровне, затем более строго. Итак, считаем, что электромагнитное поле имеет вихревое происхождение и может быть описано зависящим от времени вектор – потенциалом  $\vec{A}$ . При наличии возмущения гамильтониан системы взаимодействующих частиц выглядит следующим образом:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_k (\vec{p}_k - \frac{e}{c} \vec{A}_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{r_{ij}} \quad (20.10)$$

Разделим гамильтониан на 2 члена:  $H = H_0 + V$ , где  $V$ - потенциал взаимодействия:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_k \frac{e}{mc} (\vec{p}_k \vec{A}_k + \vec{A}_k \vec{p}_k) + \sum_k \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}_k^2 \quad (20.11)$$

Напомним, что для произвольного оператора  $f$  справедливо:

$$(\hat{p}\hat{f} - \hat{f}\hat{p})\phi = -i\hbar(\nabla\hat{f}\phi - \hat{f}\nabla\phi) = -i\hbar\phi\nabla\hat{f} \quad (20.12)$$

В частности,  $(\vec{p}\vec{A} - \vec{A}\vec{p}) = -i\hbar \operatorname{div}\vec{A}$ . Теперь выберем условие калибровки

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0; \quad (20.13)$$

тогда

$$V = -\sum_k \frac{e}{mc} \vec{A}_k \vec{p}_k + \sum_k \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}_k^2 \quad (20.14)$$

Второй член сразу отбросим, поскольку нас интересует только линейный отклик. В однородном гармоническом электрическом поле  $\vec{E} = -(1/c)\partial\vec{A}/\partial t$  и

$$|A_x| = cE_x/\omega, \quad (20.15)$$

а гамильтониан возмущения приобретает вид

$$\hat{V} = \sum_k \frac{e\hbar}{m\omega} E_x \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (20.16)$$

где индекс  $k$ , как и всюду ранее нумерует частицы системы.

### 20.1.2 Формула Кубо-Гринвуда

Перейдем теперь к вычислению проводимости на частоте  $\omega$ . Вначале сделаем это на полукачественном уровне, а затем - более строго.



Определим проводимость на частоте  $\omega$  через среднюю мощность потерь на частоте  $\omega$  в единице объема системы. Мощность потерь равна:

$$\frac{1}{2}E_x^2\sigma(\omega) \quad (20.17)$$

Вычислим эту же величину рассматривая переходы частиц системы в возбужденные состояния. Вероятность перехода из состояния с энергией  $\varepsilon$  в состояние с энергией  $\varepsilon + \hbar\omega$ , в соответствии с золотым правилом Ферми, равна:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}E_x^2\frac{(e\hbar)^2}{(m\omega)^2}|D|^2N(\varepsilon + \hbar\omega) \quad (20.18)$$

где  $N(\varepsilon + \hbar\omega)$  –плотность конечных состояний, а  $D$ , согласно предыдущему параграфу

$$D = \int d^3x\psi_\varepsilon^*\partial\psi_\varepsilon/\partial x \quad (20.19)$$

Теперь вычислим потери энергии: Нужно учесть прямые и обратные переходы, а также число электронов, совершающих переходы, и число свободных мест. Приравнявая потери энергии, вычисленные двумя способами, получим:

$$\sigma(\omega) = \frac{4\pi e^2\hbar}{m^2\omega^2} \int d\varepsilon \{n^0(\varepsilon)[1 - n^0(\varepsilon + \hbar\omega)] - n^0(\varepsilon + \hbar\omega)[1 - n^0(\varepsilon)]\} \times D_{aver}^2 N(\varepsilon)N(\varepsilon + \hbar\omega), \quad (20.20)$$

В фигурных скобках перекрестные произведения исчезают и остается  $n^0(\varepsilon) - n^0(\varepsilon + \hbar\omega) = \hbar\omega(-\partial n^0/\partial\varepsilon)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= - \int \sigma(\varepsilon, \omega) \frac{\partial n^0}{\partial\varepsilon} \\ \sigma(\varepsilon, \omega) &= \frac{4\pi e^2\hbar^2}{m^2\omega^2} D_{aver}^2 N(\varepsilon)N(\varepsilon + \hbar\omega) \end{aligned} \quad (20.21)$$

Выражения (20.21) известны как формула Кубо- Гринвуда. Мы видим, что если для электронов или квазичастиц можно ввести проводимость, зависящую от энергии, то полная проводимость будет суммой таких, зависящих от энергии проводимостей вблизи уровня Ферми.

**Случай  $T = 0$**

Функция распределения в этом случае имеет вид ступени. Разность функций распределения в (20.20) отлична от нуля на интервале  $\hbar\omega$ . Поэтому

$$\sigma(\omega) = \frac{4\pi e^2 \hbar^2}{m^2 \omega^2} \int_{\varepsilon_F - \hbar\omega}^{\varepsilon_F} D_{aver}^2 N(\varepsilon) N(\varepsilon + \hbar\omega) d\varepsilon \quad (20.22)$$

Устремляя частоту к нулю, получим проводимость на постоянном токе

$$\sigma(0) = \frac{4\pi e^2 \hbar^3}{m^2} D_{aver}^2 N^2(\varepsilon_F) \quad (20.23)$$

Если электрон локализован, то  $D_{aver}^2 = 0$ , поскольку перекрытие двух волновых функций у локализованных электронов с одной энергией отсутствует.

### 20.1.3 Более строгое рассмотрение

Возмущенный Гамильтониан

$$\hat{H}_{\vec{A}}(t) = \frac{1}{2m} \sum_i \left( \hat{p}_i + \frac{e}{c} \vec{A}(\hat{r}_i, t) \right)^2 + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \quad (20.24)$$

где  $U$  - функция полной потенциальной энергии. После линеаризации относительно  $\vec{A}$  это выражение принимает стандартную форму

$$\hat{H}_{\vec{A}}(t) = \hat{H} + \frac{e}{c} \int \hat{j}_p(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad (20.25)$$

где

$$\hat{j}_p(\vec{r}) = \frac{1}{2m} \sum_i \left[ \hat{p}_i \delta(\hat{r} - \hat{r}_i) + \delta(\hat{r} - \hat{r}_i) \hat{p}_i \right] \quad (20.26)$$

есть парамагнитная составляющая плотности тока, определенная в Приложении 2. Напомним, что именно физический ток  $\vec{j}$  (как определено, например, в уравнении (A2.14)), а не  $\vec{j}_p$ , удовлетворяет уравнению непрерывности и инвариантен относительно калибровочных преобразований.

Что же касается  $\vec{j}_p$ , то он не обладает ни одним из этих замечательных свойств: его основное преимущество заключается в том, что он не зависит от  $\vec{A}$  и, следовательно, является естественной “внутренней” величиной, связанной с  $\vec{A}$ . Именно по этой причине мы определяем линейную функцию отклика  $\chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}(\vec{q}, \omega)$  как линейную функцию отклика плотности парамагнитного тока на внешний векторный потенциал, т.е.

$$\langle \hat{j}_{p\alpha} \rangle(\vec{q}, \omega) = \frac{e}{c} \sum_{\beta} \sum_{\vec{q}'} \chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}(\vec{q}, \vec{q}', \omega) A_{\beta}(\vec{q}', \omega), \quad (20.27)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - обозначения декартовых компонент векторов  $\vec{j}_p$  и  $\vec{A}$ . Здесь  $\chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}$  - это преобразование Фурье функции отклика

$$\chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}(\vec{r}, \vec{r}', t) = -\frac{i}{\hbar} \Theta(t) \langle [\hat{j}_{p\alpha}(\vec{r}, t), \hat{j}_{p\beta}(\vec{r}')] \rangle_0, \quad (20.28)$$

определенной также как в уравнении (3.127). Затем отклик физического тока получается путем добавления к уравнению (20.27) ожидаемого значения диамагнитного тока (см. уравнение -расписать его в терминах вторичного квантования, которое, очевидно, уже линейно по возмущению:

$$\chi_{\alpha\beta}^J(\vec{q}, \vec{q}', \omega) = \frac{n}{m} \delta_{\alpha\beta} + \chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}(\vec{q}, \vec{q}', \omega) \quad (20.29)$$

Вообще, имеется общее соотношение **доказать**), которое нам понадобится для вычисления проводимости

$$\chi_{j_{p\alpha}j_{p\beta}}(\vec{q}, \vec{q}', \omega) = \frac{1}{L^d} \chi_{j_{p\vec{q}\alpha}j_{p\vec{q}'\beta}}(\omega) \quad (20.30)$$

Особое значение имеет случай трансляционно-инвариантных (однородных) систем или даже неупорядоченных, но “самоусредняющихся” систем. В таких случаях парамагнитная функция отклика по току, так же как и полная, становится функцией единственного волнового вектора, т.е. мы имеем

$$\chi_{j_{p\alpha}j_{p\beta}}(\vec{q}, \vec{q}', \omega) = \chi_{j_{p\alpha}j_{p\beta}}(\vec{q}, \omega) \delta_{\vec{q}, \vec{q}'} \quad (20.31)$$

и

$$\chi_{\alpha\beta}^J(\vec{q}, \omega) = \frac{n}{m} \delta_{\alpha\beta} + \chi_{j_{p\alpha}j_{p\beta}}(\vec{q}, \omega) \quad (20.32)$$

Некоторые интересные свойства функции отклика по току электронной жидкости сразу становятся очевидными из соображений симметрии. Прежде всего, однородность и изотропность системы гарантируют, что тензор  $\chi_{\alpha\beta}^J(\vec{q}, \omega)$  может быть разложен на продольную и поперечную составляющие относительно направления  $\vec{q}$ , каждая из которых зависит только от величины  $\vec{q}$ . Другими словами, ток, индуцируемый чисто продольным векторным потенциалом, является чисто продольным, а ток, индуцируемый чисто поперечным векторным потенциалом, является чисто поперечным. Более формально можно написать

$$\chi_{\alpha\beta}^J(\vec{q}, \omega) = \chi_L(q, \omega) \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right), \quad (20.33)$$

где  $\chi_L$  и  $\chi_T$  – функции отклика ток-ток в продольном и поперечном каналах соответственно, т.е.,

$$\vec{j}_{L(T)}(q, \omega) = \frac{e}{c} \chi_{L(T)}(q, \omega) \vec{A}_{L(T)}(q, \omega) \quad (20.34)$$

где  $\vec{j}_{L(T)}$  и  $\vec{A}_{L(T)}$  - есть продольная (поперечная) компоненты плотности тока и вектор-потенциала. Обратите внимание, что мы опускаем верхний индекс  $J$  в продольном и поперечном компонентах текущей функции отклика, которые, таким образом, обозначаются просто  $\chi_L$  и  $\chi_T$ .

Из приведенного выше обсуждения должно быть очевидно, что задача вычисления отклика тока на векторный потенциал включает в себя, как частный случай, задачу вычисления отклика плотности на скалярный потенциал. Формулировка векторного потенциала, однако, является гораздо более общей, поскольку она также включает расчет отклика на поперечные электромагнитные волны и, в статическом пределе, отклика орбитальной намагниченности на магнитное поле.

#### 20.1.4 Калибровочная инвариантность

Некоторые свойства функции отклика ток-ток непосредственно вытекают из требований калибровочной инвариантности. Согласно уравнению (20.9) продольный векторный потенциал  $\vec{A}_L(q, \omega) = [c\vec{q}/(e\omega)]V(q, \omega)$  должен быть эквивалентен по своим физическим эффектам скалярному потенциалу  $V(q, \omega)$ . Первый индуцирует продольную плотность тока  $j_L(q, \omega) = (q/\omega)\chi_L(q, \omega)V(q, \omega)$  и, следовательно (через уравнение непрерывности) плотность  $n_1(q, \omega) = (q/\omega)j_L(q, \omega) = (q^2/\omega^2)\chi_L(q, \omega)V(q, \omega)$ . Эта цепочка преобразований приводит нас к выводу, что

$$\chi_{nn}(q, \omega) = \frac{q^2}{\omega^2}\chi_L(q, \omega) \quad (20.35)$$

В частности, для  $\omega = 0$  отсюда получаем

$$\chi_L(q, 0) = 0 \quad (20.36)$$

для любого конечного  $q \neq 0$ . Это, конечно, не что иное, как знакомое утверждение о том, что чисто продольный и статический векторный потенциал не может индуцировать никакого физического тока. Что касается функции поперечного отклика по току, то при отсутствии дальнего порядка ожидается

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi_T(q, 0) = \lim_{q \rightarrow 0} \chi_L(q, 0) = 0 \quad (20.37)$$

Этот результат известен как правило диамагнитной суммы, и некоторые из его следствий будут обсуждаться далее.

Физическая задача, в которой необходим отклик поперечного тока, заключается в вычислении орбитальной намагниченности, индуцируемой в электронной жидкости статическим синусоидальным магнитным полем. Это нетрудно сделать, но мы не будем углубляться с выкладками в сторону от нашего основного русла. Приведем лишь конечный результат:

$$\chi_{orb} = -\frac{e^2}{c^2} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\chi_T(q, 0)}{q^2} \quad (20.38)$$

Это орбитальная магнитная восприимчивость. Таким образом, мы видим, что необходимым условием существования конечной орбитальной магнитной восприимчивости является то, что  $\chi_T(q, 0)$  должно обращаться в нуль как  $q^2$  при  $q \rightarrow 0$ , удовлетворяя, т. о., правилу диамагнитной суммы ур. (20.37). Это условие выполняется в обычных электронных системах, но не выполняется в сверхпроводниках вследствие существования дальнего порядка и вытекающей из этого особенности функций отклика по току при  $q \rightarrow 0$ . Т.о., сверхпроводящие системы обладают бесконечной орбитальной восприимчивостью, которая проявляется в идеальном экранировании приложенного магнитного поля (эффект Мейснера).

### 20.1.5 Электропроводность

Теперь рассмотрим реакцию электронной системы на *однородное* электрическое поле,  $\vec{E}(t)$ , которая может быть представлена как производная по времени однородного векторного потенциала  $A(t) = -c \int_0^t E(t') dt'$ . Преобразование Фурье от  $\vec{A}(t)$  равно

$$\vec{A}(\omega) = -(ic\omega)\vec{E}(\omega)$$

. Согласно уравнению (20.34) и (20.32) компонента  $q = 0$  индуцированного тока заряда задается формулой

$$-ej_\alpha(0, \omega) = \frac{ie^2}{\omega} \sum_{\beta} \chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega) E_\beta(\omega) \quad (20.39)$$

где обозначения отражают тот факт, что в неоднородной системе  $\chi_{\alpha\beta}^J$   $\chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}$  являются функциями двух волновых векторов и одной частоты. Коэффициент, умножающий на  $E_\beta(\omega)$  в приведенных выше уравнениях, является макроскопической электропроводностью

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{ie^2}{\omega} \chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega) = \frac{ie^2}{\omega} \left[ \frac{n}{m} \delta_{\alpha\beta} + \chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}(0, 0, \omega) \right]. \quad (20.40)$$

Это соотношение называют *формулой Кубо* для электропроводности. Кроме того, с учетом уравнения (20.30) в пределе длины волны мы имеем

$$\chi_{j_{p\alpha} j_{p\beta}}(0, 0, \omega) = \frac{1}{m^2 L^d} \chi_{P_\alpha P_\beta}(\omega) \quad (20.41)$$

где  $\hat{P}_\alpha$  - одна из компонент полного импульса. Согласно формуле Кубо это можно переписать как

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{ine^2}{m\omega} \left[ \delta_{\alpha\beta} + \frac{\chi_{P_\alpha P_\beta}(\omega)}{nmL^d} \right] \quad (20.42)$$

Обсудим теперь низкочастотное поведение  $\sigma_{\alpha\beta}(\omega)$ . Исходя из того факта, что однородный и статичный векторный потенциал может быть удален с помощью калибровочного преобразования, можно было бы ожидать что  $\chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega)$  обращается в нуль при  $\omega \rightarrow 0$ . На самом деле это нетривиальное ожидание, потому что волновые векторы стремятся к нулю раньше чем частота, когда векторный потенциал все еще зависит от времени. Основная проблема заключается в том, может ли порядок пределов  $q \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow 0$  быть изменен местами или нет. Мы знаем, что такая замена в порядке пределов недопустима в случае строго однородной электронной жидкости или в случае сверхпроводников, которые демонстрируют дальний порядок. В любом случае, решающий вопрос заключается в том, стремится  $\chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega)$  к нулю быстрее, чем  $\omega$ , как  $\omega$ , или медленнее, чем  $\omega$  – последний случай включает возможность того, что он может вообще не исчезать. В соответствии с этими тремя возможностями мы приходим к следующей классификации возможных типов электрического отклика электронной системы:

- **Изоляторы.**

В этом случае  $\chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega)$  стремится к нулю быстрее, чем  $\omega$ , что приводит к исчезающей проводимости при  $\omega \rightarrow 0$ . Такая ситуация обычно возникает, когда система имеет разрыв в спектре возбуждения, так что функция отклика по току является чисто реальной при малых  $\omega$ . Простейшее аналитическое поведение  $\Re\chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega)$  которое согласуется с симметрией действительной части функции отклика, является пропорциональность  $\omega^2$ , что подразумевает  $\sigma_{\alpha\beta} \propto i\omega$  для  $\omega \rightarrow 0$ .

- **Обычные проводники.**



В этих системах из-за наличия возбуждений с низкой энергией мнимая часть функции отклика по току остается конечной по мере того, как частота стремится к нулю. Простейшим аналитическим поведением  $\Im \chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega)$ , которое согласуется с требованиями симметрии на низкой частоте, является линейность по  $\omega$ . Это приводит к конечной реальной проводимости при нулевой частоте.

- **Сверхпроводники.**

В сверхпроводниках предположение о регулярности функции отклика по току нарушается, и больше не верно, что  $\chi_{\alpha\beta}^J(0, 0, \omega)$  стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$ . В простейшем случае второй член в квадратной скобке уравнения (20.39) обращается в нуль (как это было бы в идеально однородной электронной жидкости) из-за особой жесткости волновой функции основного состояния. В результате проводимость является чисто мнимой (диссипация отсутствует) и расходится как  $\omega^{-1}$ .

### 20.1.6 Вывод формулы Друде

Вооружившись изложенной теорией отклика ток-ток найдем теперь проводимость на нулевой частоте. Иначе говоря, покажем, как работает классическая формула для проводимости Друде  $\sigma = ne^2\tau/m$  (см. Ашкрофт и Мермин). Выведем ее из функции отклика по току, т.е. из Ур. (20.42). Вывод довольно тонкий и дает нам явное микроскопическое выражение для  $1/\tau$  до второго порядка в электрон-примесном взаимодействии. Мы начнем с введения модельного гамильтониана

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{1}{L^d} \sum_{\vec{k}} U(\vec{k}) n_{\vec{k}}^{(i)} n_{-\vec{k}} \quad (20.43)$$

где  $U(\vec{k})$  есть фурье-преобразование электрон-примесного потенциала (т.е. потенциала рассеяния) и

$$n_{\vec{k}}^{(i)} = \sum_i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}_i}$$

представляет собой преобразование Фурье плотности примесей, где  $\vec{R}_i$  обозначает положение примесей. Предполагая, что существует  $N_i$  случайно распределенных примесей, мы имеем

$$|n_{\vec{k}}^{(i)}|^2 = N_i$$

для всех  $\vec{k}$ , с незначительной погрешностью в термодинамическом пределе.

В отсутствие примесей  $\hat{P}_x$  является константой движения, поэтому  $\chi_{P_x P_x} = 0$ , и  $\sigma(\omega)$  сводится к значению для свободных электронов  $ine^2/(m\omega)$ . Далее, заметим, что мы можем, без потери общности, представить проводимость в виде

$$\sigma(\omega) = \frac{ine^2/(m)}{\omega + \frac{i}{\tau(\omega)}} \quad (20.44)$$

где  $1/\tau(\omega)$  является комплексной функцией частоты, которая описывает влияние примесей. Формально полагая, что этот эффект мал, можно записать асимптотическое разложение в ведущем порядке по беспорядку, следующим образом:

$$\sigma(\omega) = \frac{ine^2}{m\omega} + \frac{ne^2}{m\omega^2} \frac{1}{\tau(\omega)} + \dots \quad (20.45)$$

Сравнивая это выражение с (20.42) находим

$$\frac{1}{\tau(\omega)} = \frac{i\omega}{nmL^d} \chi_{P_x P_x}(\omega) \quad (20.46)$$

Приближенный характер этого результата заключается в том, что разложение Ур.(20.45) не сходиться для  $\omega \ll \tau^{-1}(\omega)$  и, следовательно, разложение (20.46) верно только для частот больше чем  $\tau^{-1}(\omega)$ . Игнорирование этого ограничения является ключевым, и единственным приближением, необходимым для вывода классической проводимости. Обоснование этой процедуры основано на том, что  $1/\tau(\omega)$ , рассчитанное по формуле (20.46), практически не зависит от  $\omega$  на масштабе самой  $1/\tau(0)$ .

Если продолжать в таком духе дальше с использованием формул реакции отклика ток-ток, то после длинных вычисления получается

$$\frac{1}{\tau(0)} = \frac{2\pi n_i}{\hbar L^d} \sum_{\vec{q}} (1 - \cos \theta) |U(k_F \hat{n} - \vec{q})|^2 \delta(\varepsilon_{\vec{q}\sigma} - \varepsilon_F) \quad (20.47)$$

где  $\theta$  - угол между  $\vec{q}$  и любым произвольным направлением  $\vec{n}$ .

### 20.1.7 Эффекты взаимодействия в Холловской проводимости в слабом перпендикулярном поле

Согласно теории [3], электрон-электронное взаимодействие во всех порядках по теории возмущений не влияет на холловскую проводимость  $\sigma_{xy}$  2D систем

$$\sigma = \frac{n e \mu}{1 + \mu^2 B_{\perp}^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu B_{\perp} \\ -\mu B_{\perp} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\sigma_{ee} & 0 \\ 0 & \Delta\sigma_{ee} \end{pmatrix}. \quad (20.48)$$

Если учитывать только поправку за счет е-е взаимодействия и игнорировать другие поправки (интерференция и пр.), то получаем знаменитое соотношение Альтшулера [3] между поправками к проводимости и к холловскому сопротивлению:

$$\frac{\Delta\rho_{xy}}{\rho_{xy}} = 2\frac{\Delta\rho_{xx}^{(ee)}}{\rho_{xx}} = -2\frac{\Delta\sigma_{ee}}{\sigma_D} \quad (20.49)$$

Это соотношение позволяет выделять многочастичные поправки к проводимости из измеряемых зависимостей  $\delta\rho_{xy}(T)$ , так как в диагональную компоненту вносят вклад только эффекты e-e взаимодействия.

### 20.1.8 Температурная зависимость времени упругой релаксации в 2D электронных системах

В невзаимодействующей системе электронов в пределе  $T \rightarrow 0$  проводимость и время релаксации импульса стремятся к константе  $\tau = const$ ,  $\sigma = Const$ . В учебниках часто встречается утверждение о том что в ферми-жидкости  $\tau^{-1} \propto T^2$  и это называется “ферми-жидкостная зависимость”. Однако, нужно помнить, что это справедливо только при учете процессов переброса. В 2D системах поверхности Ферми малы по сравнению с зоной Бориллюэна и процессов переброса, как правило нет.

Ранее в Лекциях первой части курса мы рассматривали два режима транспорта - диффузионный  $l_{tr} \ll L$  и баллистический  $l_{tr} \gg L$ , где  $L$ - характерный размер системы,  $l_{tr} = l_e = v_F\tau_e$  - длина релаксации импульса или упругая длина, а  $\tau_e$  время релаксации импульса или время упругого рассеяния. В первом случае мы также рассматривали квантовую поправку к проводимости Друде за счет эффектов интерференции - одностичный квантовый эффект, связанный с тем, что время неупругого рассеяния (т.е. релаксации энергии  $\tau_{inelastic} \gg \tau_e$ . При этом условии время сбоя фазы  $\tau_\phi \approx \tau_{inelastic} \gg \tau$  и эффекты интерференции дают отрицательную поправку WL к

проводимости (типа “рассеяния назад” в узком диапазоне углов), которая в 2D системе:

$$\Delta\sigma_{\text{WL}} = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln\left(\frac{\tau}{\tau_\phi}\right)$$

Мы упоминали также, что учет взаимодействия может существенно изменить этот результат. Ниже рассмотрим как это происходит.

Взаимодействие происходит существенно различным путем в двух **режимах взаимодействия** между электронами, в зависимости от соотношения между временем между столкновениями и временем ее- взаимодействия в области низких температур  $\tau^{-1} \propto T$ :

(1) диффузионный режим взаимодействия  $T\tau \ll 1$ .

(2) баллистический режим взаимодействия  $T\tau \gg 1$ .

В первом случае (низкие температуры, или т.н. “грязный предел”) время сохранения фазы или время жизни квазичастиц гораздо больше чем среднее время между встречами электронов. В результате электроны многократно встречаются друг с другом сохраняя память о своей фазе (т.е. о своей предыдущей встрече). Во втором случае (“высокие температуры” или т.н. “чистый предел”) электроны за время жизни встечаются лишь однократно и, стало быть, взаимодействуют однократно.

В этих двух случаях возникающие поправки к проводимости отличаются между собой по физическому смыслу и функционально. В первом случае они будут иметь в 2D системах логарифмическую температурную зависимость, во втором случае - линейную по  $T$  зависимость. Понятно, что приведенные неравенства являются качественными. Чтобы определить количественно кроссовер между двумя режимами нужно приравнять друг к другу поправки в двух режимах и найти такое значе-

ние температуры (или  $T\tau$ ), при котором поправки в диффузионном и в баллистическом режимах взаимодействия становятся равными. Температура кроссовера будет содержать численные коэффициенты, а также ферми-жидкостные параметры. Кроме того, температура кроссовера также будет различной для различных характеристик системы, например таких как проводимость, восприимчивость, теплоемкость и т.п.

В диффузионном режиме взаимодействия поправка впервые была вычислена в работах [1, 2]. В более общем, но предварительном виде эти поправки рассмотрены в монографии [3]. Наиболее полно, во всем же диапазоне температур, включая кроссоверный режим, поправки были вычислены в серии работ Zala, Narozhyi, Aleiner в 2001-2003гг.

### Квантовая поправка к времени сбоя фазы

Поправка  $\Delta(\tau_\phi^{-1})$  вычислялась аналитически и численно во многих работах в частности в работе [4] в терминах ферми жидкости, по теории возмущений. В случае отсутствия магнитного поля, в диффузионном режиме она имеет вид

$$\begin{aligned}\tau_\phi^{-1} &= (1 + A) \frac{T}{g} \ln [g(1 + F_0^a)] + B \frac{T^2}{E_F} \ln(2E_F\tau) \\ A &= \frac{3(F_0^a)^2}{(1 + F_0^a)(2 + F_0^a)} \\ B &= \frac{\pi}{4} \left( 1 + \frac{3(F_0^a)^2}{(1 + F_0^a)^2} \right),\end{aligned}\quad (20.50)$$

где  $g = 2\pi\hbar/(e^2\rho_\square)$ - безразмерная проводимость 2D-системы и  $\rho_\square$ - сопротивление “на квадрат” (в 2D системе сопротивление и удельное сопротивление равны)

В баллистическом режиме взаимодействия  $T\tau \gg 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_\phi} &= \frac{\pi^2 T^2}{4 E_F} \ln \left( \frac{2E_F}{T} + C(T, E_F, F_0^a) \right) \\ C &= \frac{3(F_0^a)^2}{(1 + F_0^a)^2} \ln \left( \frac{E_F}{T\sqrt{b(F_0^a)}} \right),\end{aligned}\quad (20.51)$$

где численная константа  $b(F_0^a) = (1 + (F_0^a)^2)/(1 + F_0^a)^2$ .

Заметим, что температура кроссовера в данном случае отвечает условию  $T\tau = 1 + F_0^a$ . Поскольку  $F_0^a < 0$ , то температура кроссовера ниже, чем  $1/\tau$ .

### Квантовая поправка к проводимости в нулевом поле

В диффузионном режиме взаимодействия поправка взаимодействия к проводимости вычислялась в нескольких работах,

по теории возмущений, в рамках ферми-жидкости (для обзора работ см. [3]). В диффузионном режиме взаимодействия она имеет вид

$$\Delta\sigma = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln \hbar T \tau \left[ 1 + N_t \left( 1 - \frac{\ln(1 + F_0^a)}{F_0^a} \right) \right] \quad (20.52)$$

Здесь  $N_t = 4n_v^2 - 1$  число триплатных членов,  $N_t = 3$  для однодолинной системы,  $N_v = 15$  для двухдолинной системы (напр., электроны в Si). Первая единица в квадратных скобках - это интерференционная поправка от слабой локализации, единица в круглых скобках - синглетный член взаимодействия. Оба синглетных члена имеют знак, соответствующий слабой локализации.

С триплатными членами интереснее: ввиду того, что  $F_0^a < 0$ , логарифм отрицателен и триплатная поправка работает противоположно поправке слабой локализации и синглетному члену. При больших значениях  $|F_0^a|$  суммарная поправка  $\Delta\sigma$  может стать отрицательной. Это прекрасно наблюдается в экспериментах с 2D сильно-коррелированными системами.

В баллистическом режиме взаимодействия температурная зависимость скорости рассеяния была вначале получена в приближении Хартри [6, 7, 8, 9]. Во-первых, результаты [6, 7, 8, 9] учитывают только члены взаимодействия типа Хартри, и игнорируют обменные члены (типа Фока). Во-вторых, эта теория, по существу, использует пертурбативное разложение в терминах параметра взаимодействия, которое нарушается для более сильной связи (большие  $r_s$ ). Оба вопроса приводят к неправильным теоретическим предсказаниям на количественном уровне и, частично, даже на качественном уровне.

Наиболее полно поправка к проводимости была вычислена в работе [5] в обоих режимах взаимодействия, а также в крос-



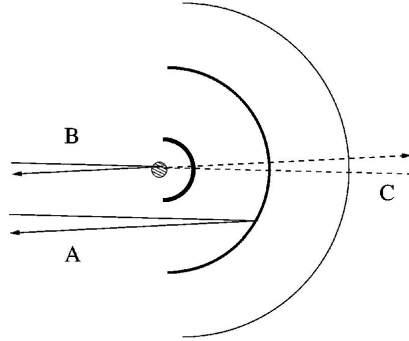


Рис. 20.1: Рассеяние при участии осцилляций Фриделя. Интерференция между двумя путями А и В, в основном приводит к обратному рассеянию. Осцилляции Фриделя создаются из-за обратного рассеяния на примеси, путь С. Из работы [5]

совершенном режиме  $T\tau \sim 1$ . Фактически, в этой работе был введен новый тип когерентных эффектов в рассеянии электрона на примеси – в баллистическом режиме взаимодействия.

Начнем с простейшего случая слабого короткодействующего взаимодействия  $V_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  и выясним как можно получить поправку к проводимости в баллистическом пределе, т.е. за счет одного акта рассеяния. Рассмотрим одиночную примесь, локализованную в некоторой точке в начале координат. Потенциал примеси  $U(\vec{r})$  индуцирует модуляцию электронной плотности вблизи примеси. Осциллирующая часть модуляции - осцилляции Фриделя в 2D можно записать как

$$\delta\rho(\vec{r}) = -\frac{\nu\lambda}{2\pi r^2} \sin(2k_F r) \quad (20.53)$$

Здесь  $\vec{r}$  - расстояние до примеси, а ее потенциал рассматривается в борновском приближении  $\lambda = \int U(\vec{r}) d\vec{r}$ . Вследствие электрон-электронного взаимодействия  $V_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  возникает дополнительный потенциал рассеяния из-за осцилляций Фри-

деля (20.53). Этот потенциал может быть представлен как сумма прямого (Хартри) и обменного (Фок) членов [31]:

$$\delta V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_H(\vec{r}_1)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - V_F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (20.54)$$

Поправка к проводимости в ведущем порядке является результатом интерференции между двумя полуклассическими траекториями, изображенными на Рис. 20.1. Если электрон следует по пути **A**, он рассеивается за счет осцилляций Фриделя, создаваемых примесью, а путь **B** соответствует рассеянию самой примесью.

Интерференция наиболее важна для углов рассеяния, близких к  $\pi$  (или для обратного рассеяния), поскольку дополнительный набег фазы, накопленный электроном на пути “A” ( $e^{i2kR}$ , где  $R$  - длина дополнительного интервала пути относительно “B”, а  $2k$  - разница между начальным и конечным импульсами для этого дополнительного интервала пути) компенсируется фазой осцилляций Фриделя  $e^{2i2k_F R}$ , так что амплитуды, соответствующие двум траекториям, являются когерентными. В результате вероятность обратного рассеяния больше, чем классическое ожидание (учитываемое при расчете проводимости Друде).

Следовательно, учет интерференционных эффектов приводит к поправке в проводимости. Заметим, что интерференции сохраняются на больших расстояниях, ограничиваясь только температурой  $R \approx 1/|k - k_F| \leq v_F/T$ . Таким образом, существует возможность того, что поправка будет иметь нетривиальную температурную зависимость. Знак поправки зависит от знака константы связи, описывающей электрон-электронное взаимодействие.

Исходя из этих качественных соображений в [5] была вычислена поправка к проводимости Друде в “зарядовом” и триплет-

ном каналах взаимодействия. Поправка в зарядовом канале объединяет вклад Фока и синглетную часть вклада Хартри.

$$\Delta\sigma = \delta\sigma_T + \delta\sigma_C \quad (20.55)$$

Вклад в зарядовом канале

$$\delta\sigma_C = \frac{e^2 T\tau}{\pi\hbar \hbar} \left[ 1 - \frac{3}{8}f(T\tau) \right] - \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \left( \ln \frac{E_F}{T} \right) \quad (20.56)$$

Вклад в триплетном канале равен

$$\begin{aligned} \delta\sigma_T = & A(F_0^a) \frac{e^2 T\tau}{\pi\hbar \hbar} \left[ 1 - \frac{3}{8}t(T\tau, F_0^a) \right] \\ & - 3B(F_0^a) \frac{e^2}{2\pi\hbar} \ln \left( \frac{E_F}{T} \right) \end{aligned} \quad (20.57)$$

Здесь функция  $A$  описывает амплитуду триплетной поправки в баллистическом режиме взаимодействия:

$$A(F_0^a) = \frac{3F_0^a}{(1 + F_0^a)} \quad (20.58)$$

и функция  $B$  - амплитуду поправки в диффузионном режиме взаимодействия:

$$B(F_0^a) = N_t \left( 1 - \frac{1}{F_0^a} \ln(1 + F_0^a) \right) \quad (20.59)$$

Функции  $f(T\tau)$  в (20.56) и  $t(T\tau, F_0^a)$  в (20.57)) описывают кроссовер между диффузионным и баллистическим режимами взаимодействия. Согласно теории температура кроссовера  $T^* = (1 + F_0^a)/2\pi\tau$  [5].  $N_t = 4(n_v)^2 - 1$ , как и ранее, есть число триплетных членов взаимодействия. Графики функций  $f(x)$  и  $t(x)$  приведены на рисунках.

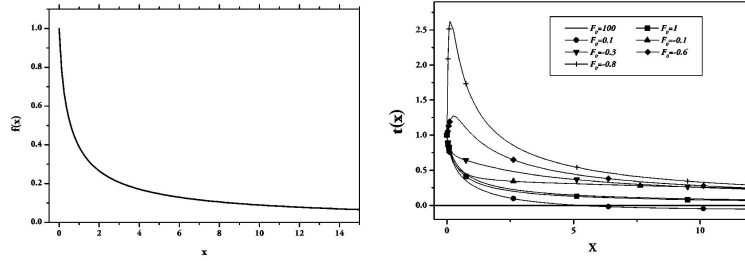


Рис. 20.2: Безразмерные функции  $f(x)$  и  $t(x, F_0^a)$ . Из работы [5].

При больших значениях параметров  $N_t$  и  $|F_0^a|$  вклад  $\delta\sigma_T$  преобладает,  $d\sigma/dT$  становится отрицательной и проводимость растет с понижением температуры. На рисунке 20.4 показана типичная температурная зависимость проводимости для двумерной сильно-взаимодействующей системы электронов в широком диапазоне температур - от баллистического режима взаимодействия до диффузионного. Общая картина такова - при высоких температурах имеется баллистическая зависимость (линейная по температуре), которая ниже температуры кроссовера  $T^*$  переходит в диффузионную зависимость - более плавный догарифмический рост  $\sigma(T)$  при понижении  $T$ .

*Будет ли этот рост  $\sigma(T)$  с понижением температуры длиться до  $T = 0$ ? Ответ - нет!*

По мере снижения температуры вначале она становится ниже скорости междолинной релаксации  $T = 1/\tau_{vv}$ , долины перестают быть хорошими квантовыми числами и число триплетных членов уменьшается до  $4n_v - 1$ . Это соответствует температурам порядка 0.1К для 2D электронных систем в (001) кремнии. Наконец, когда температура станет ниже скорости спиновой релаксации, число триплетных спинов обратится в 1. Этому гипотетическому случаю соответствуют (недостижимые пока) температуры электронов порядка мкК. После умень-

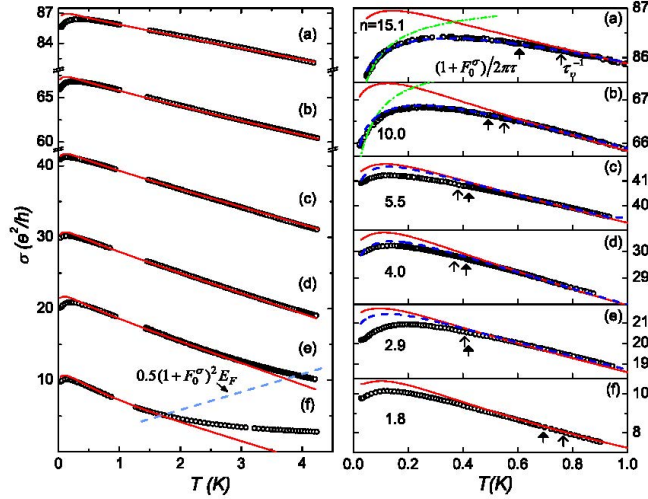


Рис. 20.3: Измеренные температурные зависимости  $\sigma(T)$  при различных электронных плотностях  $n = 15.1, 10.0, 5.5, 4.0, 2.9, 1.8$ , в единицах  $10^{11} \text{см}^{-2}$ , сверху вниз. Кружками показаны экспериментальные данные; красными кривыми — теоретические зависимости. На левой панели пунктирная синяя кривая соответствует  $T = 0.5(1 + F_0^a)^2 E_F$  - граница применимости теории по температуре. На правой панели показан тот же набор данных в более узком температурном интервале, тонкие стрелки соответствуют  $T = \tau_{vv}^{-1}$ , а толстые стрелки указывают на температуру кроссовера  $T^*$ . Зеленые кривые с пунктирными линиями на правой панели рассчитаны с использованием  $N_t = 3$  (долины полностью перемешаны); синие пунктирные кривые  $\sigma(T) = \sigma_D + \delta_C + N_t(T\tau_{vv}) \times \delta\sigma_T(T)$  с непрерывно изменяющимся  $N_t$ , в пределах от  $N_t = 3$  (для  $T \gg \tau_{vv}^{-1}$ ) до  $N_t = 15$  (для  $T \gg \tau_{vv}^{-1}$ ). Из работы [10].

шения числа триплетных членов, синглетные члены начинают доминировать, заставляя проводимость снова снижаться при  $T \rightarrow 0$ . Результаты измерений и их аппроксимация по формулам (20.55) показаны на рисунке 20.4. Показана также зависимость с модельным плавным изменением числа триплетных членов  $N_t(T)$  при понижении температуры.

### Результаты вычисления и измерения $F_0^a$ из $\sigma(T)$

Видно, что температурная зависимость проводимости определяется одним ферми-жидкостным параметром  $F_0^a$ . Для определения его величины в зависимости от  $r_s$  используются разные приближения. В частности, в [5] получены приближенные аналитические зависимости

$$F_0^a \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \frac{r_s}{\sqrt{2-r_s^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2-r_s^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2-r_s^2}} \right), \quad r_s^2 < 2$$

$$F_0^a \rightarrow -\frac{1}{\pi} \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2-2}} \arctan(\sqrt{r_s^2/2-1}) \quad r_s^2 > 2 \quad (20.60)$$

Фактически, сравнение с теорией [5] измеренной температурной зависимости  $\sigma(T)$  в нулевом поле является одним из методов измерения  $F_0^a$  [10].

## 20.2 Измерения перенормировки спиновой восприимчивости

Перенормированная спиновая восприимчивость

$$\chi^*/\chi_b = \frac{g^* m^*}{2m_b}.$$

легко измеряется различными методами, которые практически не зависят от моделей и предположений.

Гораздо труднее разделить ее на сомножители и определить отдельно перенормировку  $g^*$  и  $m^*$ . Для этого приходится полагаться на различные модели.

### 20.2.1 Определение $F_0^a$ из биений квантовых осцилляций

В работах [11, 12] был предложен и использован способ измерений квантовых осцилляций в магнитном поле с электрически управляемым вектором. Принцип метода поясняется на Рис. 20.5. Компонента поля в плоскости двумерной системы  $B_{\parallel}$  создает неравное заселение спиновых подзон, необходимое для определения спиновой восприимчивости. Нормальная компонента поля необходима для возникновения квантования Ландау, наблюдения квантовых осцилляций и подсчета с их помощью заселенности каждой спиновой подзоны.

В присутствии перпендикулярного поля  $B_{\perp}$  энергетический спектр двумерной системы полностью квантован и состоит из эквидистантных уровней Ландау. Приложение поля  $B_{\parallel}$  вызывает биения квантовых осцилляций, которые регистрируются в зависимости от  $B_{\perp}$ . Зеемановское расщепление уровней Ландау приводит к неравному числу заполненных уровней Ландау в подзонах  $\uparrow$  и  $\downarrow$ . Поэтому различны и скорости изменения с полем  $B_{\perp}$  наивысших уровней Ландау в двух подзонах. При некоторых значениях поля уровни Ландау от двух подзон пересекают  $E_F$  одновременно, осцилляции от них имеют одинаковую фазу их амплитуды складываются. При других значениях поля уровни Ландау в двух подзонах проходят через уровень Ферми в противофазе и осцилляции от них вычитаются.

Частота биений пропорциональна спиновой поляризации 2D электронной системы [12]:

$$P \equiv \frac{n_{\uparrow} - n_{\downarrow}}{n} = \frac{\chi^* B_{\text{tot}}}{g_b \mu_B}, \quad (20.61)$$

где  $n_{\uparrow}, n_{\downarrow}$  обозначают плотности электронов в  $\uparrow$  и  $\downarrow$  подзонах,

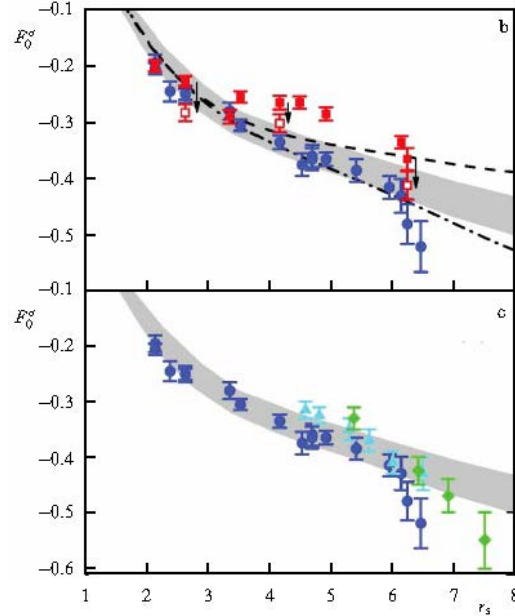


Рис. 20.4: (а) Значения  $F_0^a$ , полученные в результате сопоставления зависимостей  $\sigma(T)$  и  $\sigma(B)$  с теорией [5]. Пунктирная кривая соответствует значению  $F_0^a(r_s)$ , извлеченному из измерений биений квантовых осцилляций [12]. Заштрихованные области на панелях (а) и (б) показывают зависимость  $F_0^a(r_s)$  полученную из измерений квантовых осцилляций в различных предположениях. (б) Сравнение  $F_0^a$  значений, вычисленных из измерений  $\sigma(T)$  различными авторами. Из работы [10].

соответственно,  $g_b = 2$  – зонное значение  $g$ -фактора Ланде для Si, и  $B_{\text{tot}} = \sqrt{B_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2}$ . Для делокализованных электронов вырожденного 2D Ферми газа уравнение (20.61) можно представить в более удобном для практики виде:

$$P = g^* m^* \frac{B_{\text{tot}}}{\nu B_{\perp}}, \quad (20.62)$$

где  $\chi^* \propto g^* m^*$  – Ферми-жидкостная перенормированная восприимчивость Паули,  $g$ - фактор и эффективная масса, соответственно и  $\nu = nh/(eB_{\perp})$  - фактор заполнения уровней Ландау.



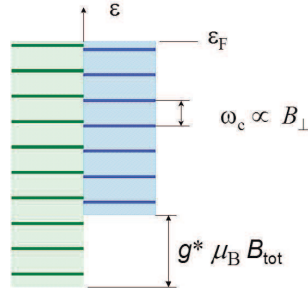


Рис. 20.5: Схематический спектр уровней Ландау в двух спиновых подзонах, расщепленных полем  $B_{tot}$ . Из работы [12].

Т.о., из периода биений можно прямо определить спиновую поляризацию и искомую спиновую восприимчивость.

Во взаимодействующей системе форма и амплитуда осцилляций конечно могут отличаться от простой Ферми-жидкостной теории [16, 17, 14, 15]. В частности, в случае сильного электрон-электронного взаимодействия, квазиклассическая формула Лифшица-Косевича [16, 17] требует модификации: эффекты взаимодействия приводят к температурно-зависящей перенормировке как  $m^*$ , так и  $T_D$  [15, 14, 13] в экспоненциальном амплитудном факторе.

Отмеченные осложнения, однако, несущественны для анализа биений, если искомой величиной является только период биений и фаза осцилляций, т.е. спиновая поляризация, и в конечном итоге, спиновая восприимчивость.

### Замечания:

(1) Использованный метод измерения  $\chi^*$  основан на определении соотношения между заселенностями двух спиновых подзон, т.е.  $M/V$ . Это, конечно, отличается от истинно термодинамического определения  $\chi_T = dM/dB$ . Однако, если вклад в измеряемые величины вносит один и тот же ансамбль электронов и если  $M$  линейно зависит от поля, то  $\chi^*$  и  $\chi_T$  должны

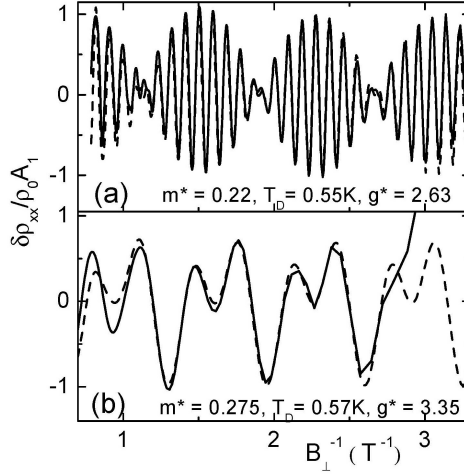


Рис. 20.6: Пример биений осцилляций Шубникова-де Гааза для (a)  $n = 3.76 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$ ,  $T = 0.2 \text{K}$ ,  $B_{\parallel} = 2.15 \text{T}$ ,  $P = 20\%$ ; (b)  $n = 1.815 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$ ,  $T = 0.2 \text{K}$ ,  $B_{\parallel} = 2.5 \text{T}$ ,  $P = 64\%$ . Экспериментальные данные показаны точками, их аппроксимация формулами [16] (с показанными параметрами) - жирными сплошными линиями. Все данные нормированы на амплитуду основной гармоники  $A_1(B)$ . Из работы [12, 13].

совпадать.

(2) По мере увеличения взаимодействия ( $r_s$ ) в 2D системе возможно развитие неустойчивости однородного зарядового или спинового состояния и тогда рассмотрение эффектов взаимодействия должно проводиться с учетом пространственной неоднородности (неоднофазности). Экспериментальные проявления этой неустойчивости рассматриваются в обзоре [18].

(3) Кроме того, на измеряемое значение восприимчивости влияет отклонение от идеальности 2D системы, т.е. ненулевая толщина 2D слоя, характер потенциала примесей (короткодействующий или плавный далекодействующий), а также неоднофазность системы, приводящая к зависимости воспри-

имчивости от  $B_{\parallel}$ .

Для иллюстрации последнего замечания на рисунке 20.7 приведена сводка результатов измерений  $F_0^a$  проведенных различными исследователями на различных образцах с 2D электронными и дырочными системами носителей. Помимо разброса точек видно, что данные разбиваются на две группы - с короткодействующим потенциалом примесей (например, Si) и плавным дальнедействующим потенциалом (гетероструктуры GaAs/GaAlAs с  $\delta$ -легированием). Для последнего случая Горным и Мирлином была разработана теория, идейно аналогичная [5], также в терминах квантовых поправок взаимодействия, но с более громоздкими формулами и поэтому она здесь не рассматривается.

### 20.3 А что остается за бортом ?

Существует целый пласт сильных эффектов электрон-электронного взаимодействия, которые остались вне рассмотрения.

- **Нарушение пространственно однородного состояния в спиновом или зарядовом каналах.** Сюда входят такие состояния как волна зарядовой плотности, вигнеровский кристалл, волна спиновой плотности, глобальная или локальная стонеровская неустойчивость и т.д.
- **Эффекты взаимодействия в квантующем слабом магнитном поле.** Сюда входят перенормировка амплитуды квантовых осцилляций эффектами межэлектронного взаимодействия и способ определения одетой эффективной массы электронов.

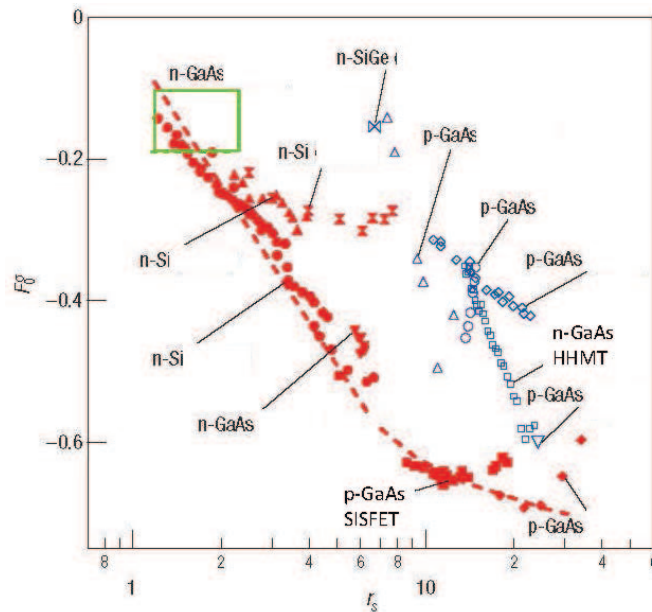


Рис. 20.7: Сводка значений  $F_0^\sigma$ . Красные заполненные символы - для индуцированных 2D систем, пустые синие символы - для 2D систем  $n$ - и  $p$ -типа в различных материалах. Зеленый квадрат обрамляет диапазон  $F_0^\sigma$ , ожидаемый для 2D  $n$ -GaAs систем согласно теории экранирования плавного потенциала. Штриховая линия проведена для ясности восприятия. Из работы [19].

- **Эффекты взаимодействия в квантующем сильном магнитном поле.** Сюда входят эффекты взаимодействия электронов на разных уровнях Ландау, приводящие к осциллирующей от поля зависимости перенормировки расстояния между уровнями Ландау, уширения уровней, осцилляции уровня Ферми, скирмионы, и т.д.
- **Эффекты взаимодействия на частично заполненном уровне Ландау.** Это - дробный квантовый эффект Холла, композитные фермионы.

- Потеря устойчивости ферми-жидкостного состояния и образование плоской зоны на уровне ферми. Это теоретическое предложение носит название фермионной конденсации.
- Потеря устойчивости ферми-жидкостного состояния и образование маргинальной ферми-жидкости.
- и т.д., и т.д.

**20.3.1 Приложение 1. Задачи**

# Литература

- [1] B.L. Altshuler, A.G. Aronov, and D.E. Khmelnitsky, J.Phys. C 15, 7367 (1982).
- [2] H. Fukuyama and E. Abrahams, Phys. Rev. B 27, 5976 (1983)
- [3] B.L. Altshuler and A.G. Aronov in Electron-Electron Interactions in Disordered Systems, eds. A.L. Efros, M. Pollak (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [4] B. N. Narozhny, Gabor Zala, and I. L. Aleiner, Phys. Rev. B, **65**, 180202R (2002).
- [5] Gabor Zala, B. N. Narozhny, I. L. Aleiner, Interaction corrections at intermediate temperatures: Longitudinal conductivity and kinetic equation, Phys. Rev. B **64**, 214204 (2001).
- [6] F. Stern, Phys. Rev. Lett. 44, 1469 (1980).
- [7] F. Stern and S. Das Sarma, Solid-State Electron. 28, 158 (1985).
- [8] Gold and V.T. Dolgoplov, Phys. Rev. B 33, 1076 (1986).
- [9] S. Das Sarma and E.H. Hwang, Phys. Rev. Lett. 83, 164 (1999).

- [10] Interaction Effects in Conductivity of a Two-Valley Electron System in High-Mobility Si Inversion Layers, N.N. Klimov, D.A. Knyazev, O.E. Omel'yanovskii, V.M. Pudalov, H.Kojima, M.E. Gershenson, *Phys.Rev. B* **78**, 195308 (2008).
- [11] M. Gershenson, V.M. Pudalov, H. Kojima, N. Butch, G. Bauer, G. Brunthaler, A. Prinz, *Direct measurements of the effective g-factor and mass of electrons in Si-MOSFETs over a wide range of densities*, *Physica E*, **12**, 585 (2002)
- [12] V. M. Pudalov, M. E. Gershenson, H. Kojima, N. Butch, E. M. Dizhur, G. Brunthaler, A. Prinz, and G. Bauer, *Low-Density Spin Susceptibility and Effective Mass of Mobile Electrons in Si Inversion Layers*, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 196404 (2002)
- [13] Pudalov V M, Gershenson M E, Kojima H, *Probing electron interactions in a two-dimensional system by quantum magneto-oscillations*, *Phys. Rev. B* **90**, 075147 (2014).
- [14] Martin G W, Maslov D L, Reizer M Yu *Phys. Rev. B* **68**, 241309 (2003)
- [15] Adamov Y, Gornyi I V, Mirlin A D, *Phys. Rev. B* **73**, 045426 (2006)
- [16] Лифшиц И М, Косевич А М *ЖЭТФ* **29**, 730 (1956); [*JETP* **2**, 636 (1956)]
- [17] Isihara A, Smrčka L *J. Phys. C: Solid State Phys.* **19**, 6777 (1986)
- [18] В.М. Пудалов, *Фазовое расслоение в двумерных электронных системах: экспериментальная картина явления*, *Письма в ЖЭТФ* **116**, вып. 7, с. 456 (2022).



- [19] Clarke W R, C. E. Yasin, A. R. Hamilton, A. P. Micolich, M. Y. Simmons, K. Muraki, Y. Hirayama, M. Pepper, D. A. Ritchie, *Impact of long- and short-range disorder on the metallic behaviour of two-dimensional systems*, *Nat. Phys.* **4**, 55 (2007)
- [20] J. J. Quinn, R. A. Ferrell, *Phys. Rev.* **112**, 812 (1958).
- [21] J. Bardeen, *Phys. Rev.* **50**, 1098 (1936).
- [22] Д. Пайнс, *Элементарные возбуждения в твердых телах*, М., Мира, 1965. [D. Pines, *Elementary Excitations in Solids*, N.Y. 1963]
- [23] Р. Пайерлс, *Квантовая теория твердых тел*, пер. с англ. М., Изд. Ин.Лит, 1956ю
- [24] D. R. Hartree, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **24**, 89 (1928).
- [25] V. A. Fock, *Zs. Phys.* **61**, 126 (1930.)
- [26] Ф. Зейц (F. Seitz), *Современная теория твердого тела*, М. -Л. (1949).
- [27] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М., Физматлит, 1962.
- [28] G. F. Giuliani and G. Vignale, *Quantum theory of the electron liquid*, Cambridge University Press, 2005. ISBN-13 978-0-521-52796-5
- [29] G. D. Mahan, *Many particle physics*, Kluwer/Plenum 3rd edition (2000). ISBN 0-306-46338-5 (2004).
- [30] Блохинцев, *Введение в квантовую механику*, М., 1976.

- [31] Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, М., Наука, 1967