

ОП

## Физика сверхпроводимости и квантовых материалов

**Руководитель: В.М. Пудалов, чл.-кор. РАН**  
([pudalov@lebedev.ru](mailto:pudalov@lebedev.ru)), 7(499)132-6780

**База: Центр высокотемпературной сверхпроводимости и квантовых материалов им. В.Л. Гинзбурга («Центр Гинзбурга»)**  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

МФТИ, 22 февраля 2019г.

## **Лекция. (продолжение баллистического транспорта) Кулоновское взаимодействие и зарядовые эффекты в 1D наноструктурах**

Мы до сих пор пренебрегали кулоновским взаимодействием между электронами, (несмотря на то что они заряжены). В металлических системах большого размера это приближение прекрасно выполняется и позволяет применять приближение электронного газа и закон Ома.

Однако, уже в задаче о прыжковой проводимости учете кулоновской щели радикально изменяет проводимость. В малых системах, которые рассматриваются в данной главе, это приближение не заряженных (не взаимодействующих) электронов не выполняется и энергия кулоновского взаимодействия играет определяющую роль.

## Эффекты заряда в нормальных (несверхпроводящих) системах

$$C = Q/\varphi$$

Электростатическая энергия

$$E = Q^2/2C$$

$$C_{\text{sphere}} = r \quad (\text{3D сфера})$$

$$C_{\text{disk}} = 2r/\pi \quad (\text{2D диск})$$

$$C_{\text{disc-plate}} = r^2/4a \quad (\text{2D диск на расстоянии } a \text{ над плоскостью})$$

Всегда  $C \sim r$

**Q:** Каково соотношение между единицами емкости в абсолютной системе и в SI ?

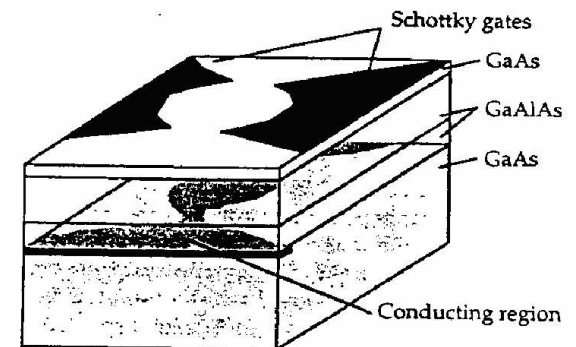
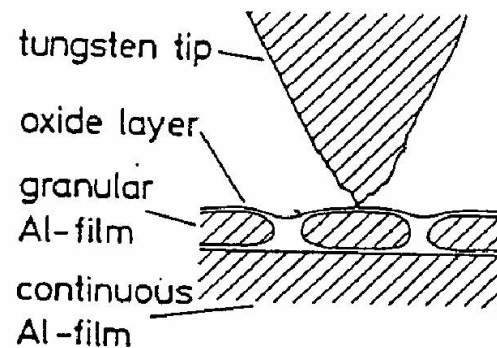
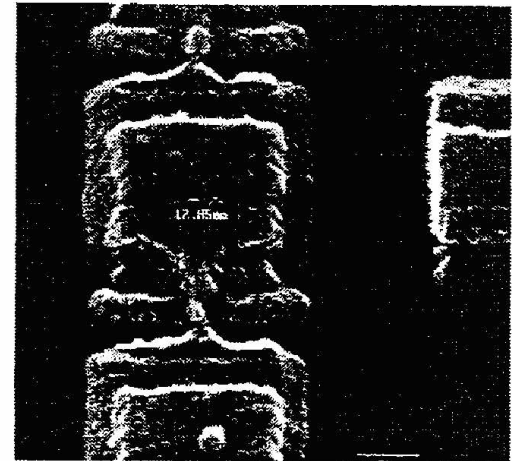
**Q:** Рассмотрим процесс его заряда от батарейки с напряжением  $V$ . В результате процесса заряда батарейка совершает работу

$$V \int I dt = V Q = Q^2/C.$$

Конденсатор зарядился и приобрел электростатическую энергию  $Q^2/2C$ .

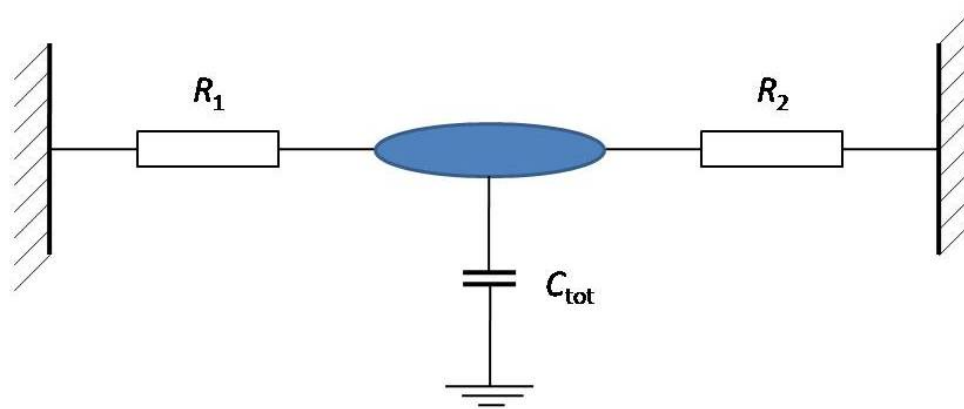
**Куда делась половина работы, которую совершила батарейка?**

Кулоновская энергия заряженного тела с элементарным зарядом есть  $E_C = e^2/2C \propto 1/r$ . По мере уменьшения размеров системы  $E_C$  растет. При низких температурах  $E_C \gg kT$



Типичный размер туннельного барьера  $100 \times 100 \text{ нм}^2$  и его емкость  $1 \text{ фФ}$  (т.е.  $10^{-15} \text{ Ф}$ ). Центральный островок имеет размеры  $1000 \times 100 \text{ нм}$  и его собственная емкость равна  $0.1 \text{ фФ}$ .

## Требования к выводам



Островок с емкостью  $C_{tot}$ , слабо связан с окружением с помощью выводов с большим сопротивлением  $R_1$  и  $R_2$ . Для того чтобы принести из  $\infty$  и положить на островок один электрон требуется энергия  $E_C$ . Чтобы заряд островка был хорошо определен, нужно чтобы время разряда было велико. Т.е., чтобы квантовая неопределенность энергии островка (из-за утечки) была мала по сравнению с  $E_C$ .

Время разряда емкости равно

$$\tau_{RC} = C_{tot} R_{12} = C_{tot} / G_{12}$$

$$\text{где } G_{12} = G_1 + G_2 = 1/R_1 + 1/R_2.$$

$$\delta E \delta t = \hbar \quad \Rightarrow \quad \delta E = \hbar / \tau_{RC}$$

Для того чтобы заряд был хорошо определен и локализован на островке нужно чтобы

$$E_C = e^2 / 2C_{tot} > \delta E.$$

Отсюда получаем условие для слабой связи

$$G_{12} < e^2 / 2\hbar = \pi e^2 / h$$

В терминах баллистического транспорта через туннельный барьер это условие означает слабую прозрачность барьера  $T < 1$ .

# Туннелирование электрона через одиночный туннельный барьер и эффекты одноэлектронной зарядки

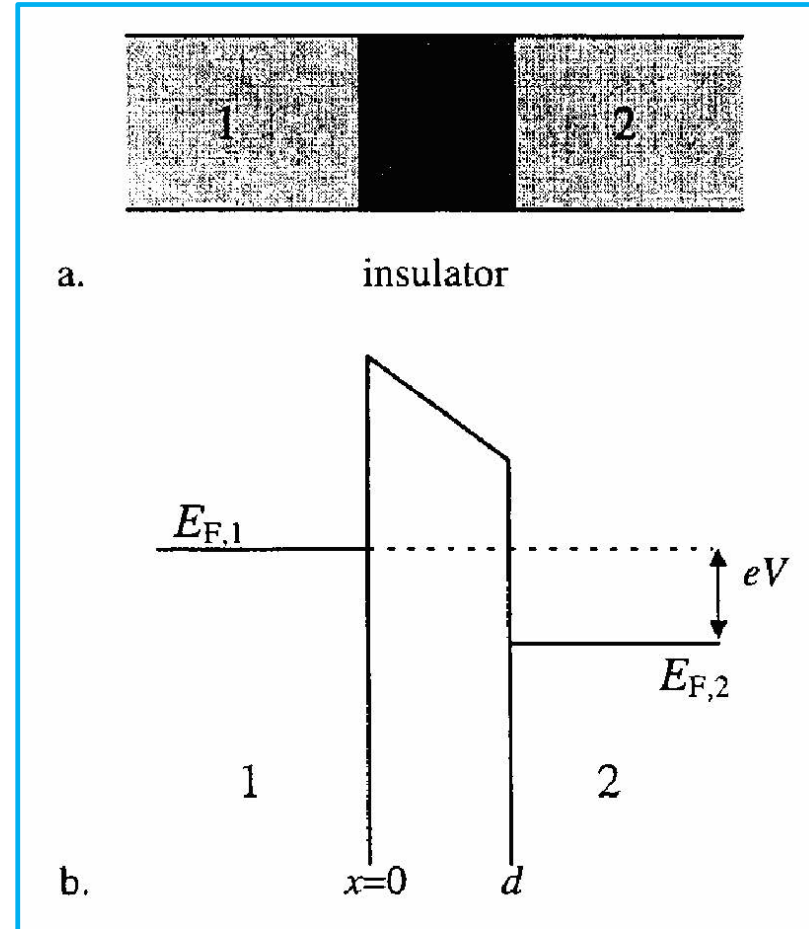
Если  $E_{\text{kin}} < V$ , то классический электрон локализован на островке и нигуда с него не уйдет.

Квантовый электрон туннелирует.

$\Gamma$  - частота туннелирования.

Вычислим  $\Gamma$

Пусть связь между резервуарами слабая.  $H = H_1 + H_2 + H_t$ , где  $H_{1,2}$  - гамильтонианы резервуаров, вычисленные в предположении, что они не связаны, а  $H_t$  описывает обмен электронами посредством туннелирования.



Частота туннелирования из начального ( $i$ ) в конечное ( $f$ ) состояние можно найти из золотого правила Ферми:

$$\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_1 | H_t | \Psi_2 \rangle|^2 \delta(E_i - E_f)$$

Ток возникающий из этого туннелирования просто равен  $|e| \Gamma$ .

Туннельный матричный элемент  $t_{i,j} = \langle \Psi_1 | H_t | \Psi_2 \rangle$  описывает перекрытие между волновыми функциями до и после туннелирования и т.о. представляет коэффициент прохождения через барьер при энергии  $E_i = E_f$ .

Два предположения были сделаны:

- 1) связь между резервуарами настолько слаба, что туннелирование не меняет волновой функции электронов в резервуарах.
- 2) наше выражение описывает вероятность прохождения одной частицы в одну сторону, без учета возможности пойти назад. Это выражение описывает переход между каждой (но одной парой) состояний  $i$  и  $f$ .



Для вычисления полной вероятности по всему ансамблю, надо умножить на плотность заполненных состояний в резервуаре 1  $\rho_1 f(E)$  и плотность пустых состояний в резервуаре 2  $\rho_2(1 - f(E'))$ . В общем случае  $E \neq E'$

Теперь полная скорость туннелирования из 1  $\rightarrow$  2 равна:

$$\Gamma_{1,2} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} |t_{1,2}|^2 \rho(E - E_1) f(E - E_1) \rho_2(E - E_2) [1 - f(E - E_2)] dE$$

Если  $|E_1 - E_2| \ll E_F$ , то это можно упростить

$$\Gamma_{1,2} = \frac{\Delta U}{e^2} G_t \frac{1}{1 - \exp(-\Delta U / kT)}$$

$G_t = (2e^2/h)\rho_1\rho_2|t_{1,2}|^2$  - кондактанс туннельного барьера,  
 $\Delta U = E_1 - E_2$ .

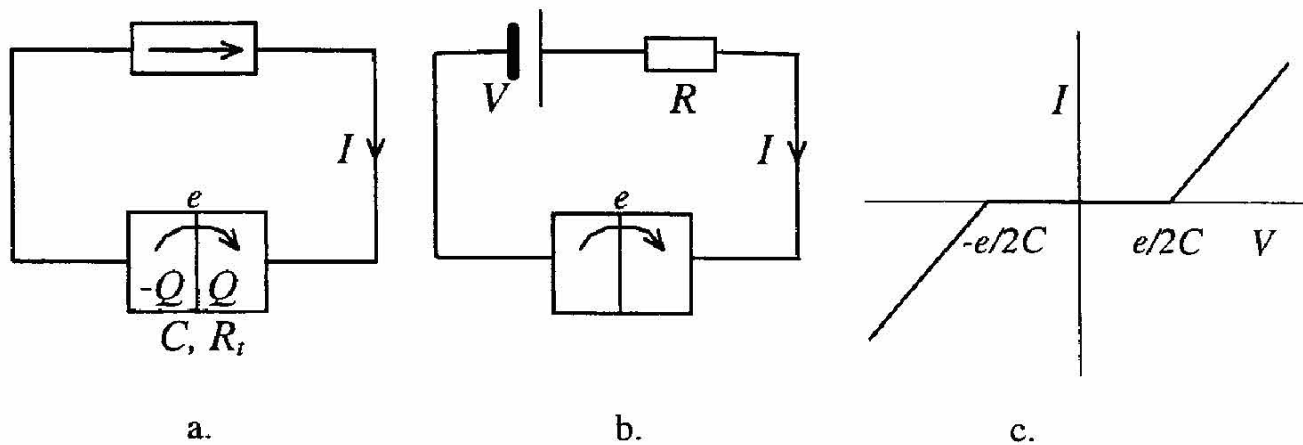
Сравни с  $G = e^2/hN_{ch}$  – кондактансом для баллистического транспорта, где  $N_{ch}$  - было число полностью проходящих каналов, т.е. для которых  $|t_{1,2}|^2 = 1$ .

$$\Gamma_{1,2} = \frac{\Delta U}{e^2} G_t \frac{1}{1 - \exp(-\Delta U / kT)}$$

Это справедливо только для случая слабой связи, т.е.  $G_t \ll e^2/h$  и в пределе низких температур  $kT \rightarrow 0$ . При  $T = 0$  это выражение можно еще упростить

$$\Gamma = \frac{-\Delta U}{e^2} G_t \quad \Delta U < 0,$$
$$\Gamma = 0 \quad \Delta U > 0$$

Пусть переход (барьер) настолько мал, что его энергия зависит от емкости.



Подсоединим к переходу источник тока с бесконечно большим внутренним сопротивлением  $R_s$ . Так мы заставляем течь ток  $I$ , независимо от того, что в барьере происходит. Если туннелирует одиночный электрон, то заряд изменится от  $Q$  до  $Q - |e|$ . Электростатическая энергия соответственно изменится от  $U_{\text{initial}}$  до события туннелирования к  $U_{\text{final}}$  - после.

$$\Delta U = U_{\text{final}} - U_{\text{initial}} = \frac{(Q - |e|)^2}{2C} - \frac{(Q)^2}{2C} = -\frac{|e|}{C} \left( Q - \frac{|e|}{2} \right)$$

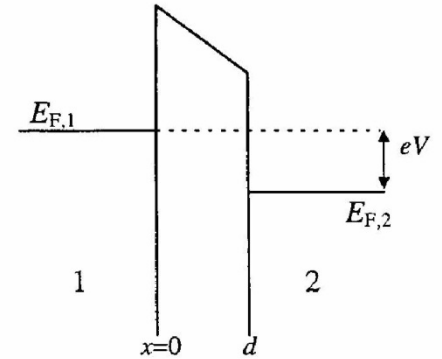
При  $T = 0$  туннелирование произойдет только при  $\Delta V < 0$  и это условие дает

$$Q > |e|/2, \quad V = Q/C > |e|/2C$$

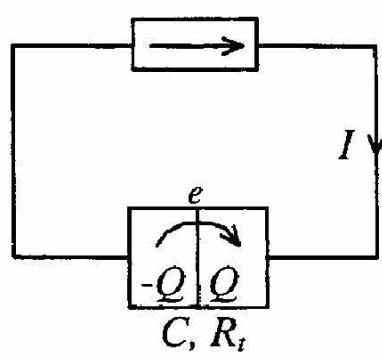
Если у нас идеальный туннельный барьер и  $R_t = \infty$ , то ток через него будет равен 0 вплоть до  $V = |e|/2C$ , а во времени - рост напряжения заряда на конденсаторе - островке. Заряд осциллирует при туннелировании каждого одиночного электрона !



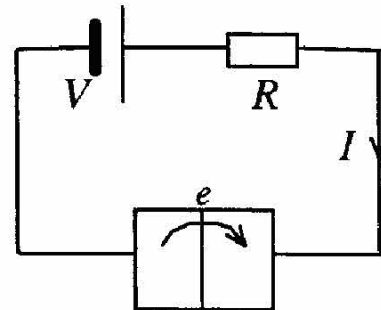
a. insulator



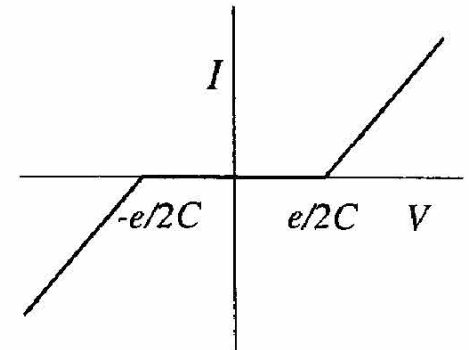
b.



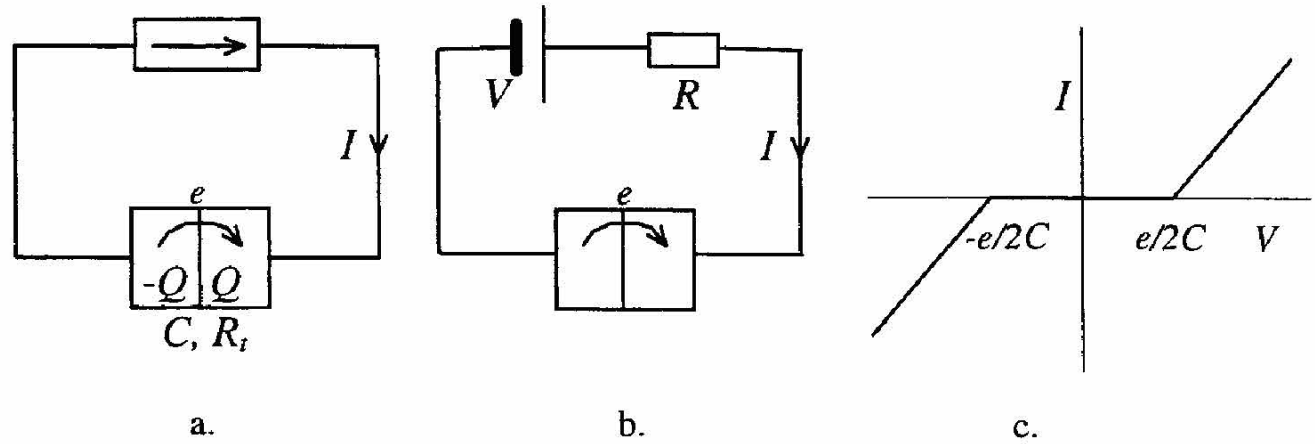
a.



b.

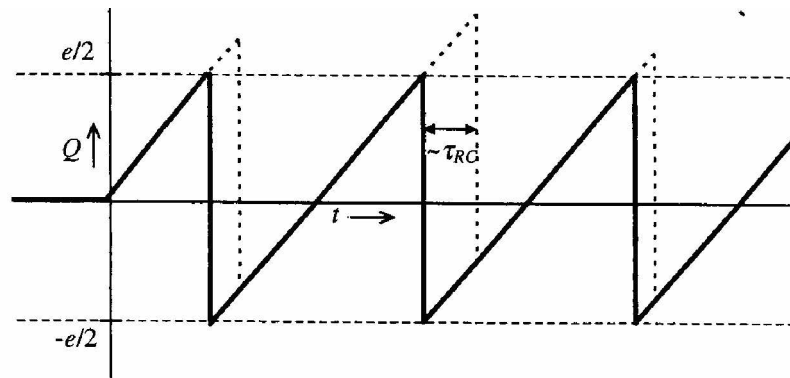


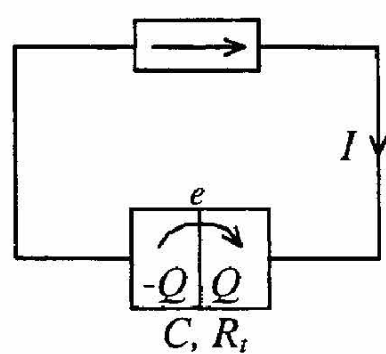
c.



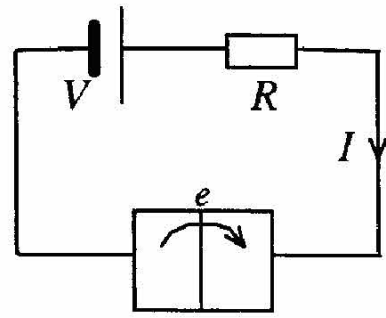
Заряд осциллирует при туннелировании каждого одиночного электрона. Заряд вначале нарастает как  $Q = It|e|$  и далее осциллирует от  $-e/2$  до  $+e/2$ .

Заметим, что полярность напряжения при этом процессе меняет знак, несмотря на то, что ток постоянен - это нетривиальное свойство нашей системы! (Можно вспомнить про классический аналог - индуктивность в электрической цепи). Частота SET осцилляций равна  $f_{\text{SET}} = 1/\Delta t = I/e$ .

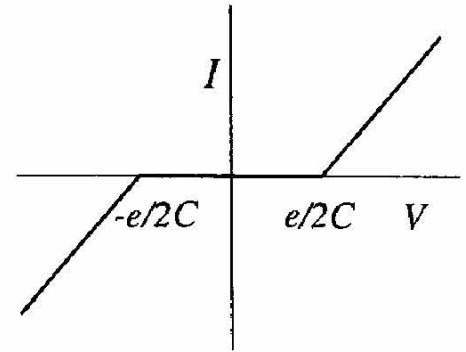




a.



b.



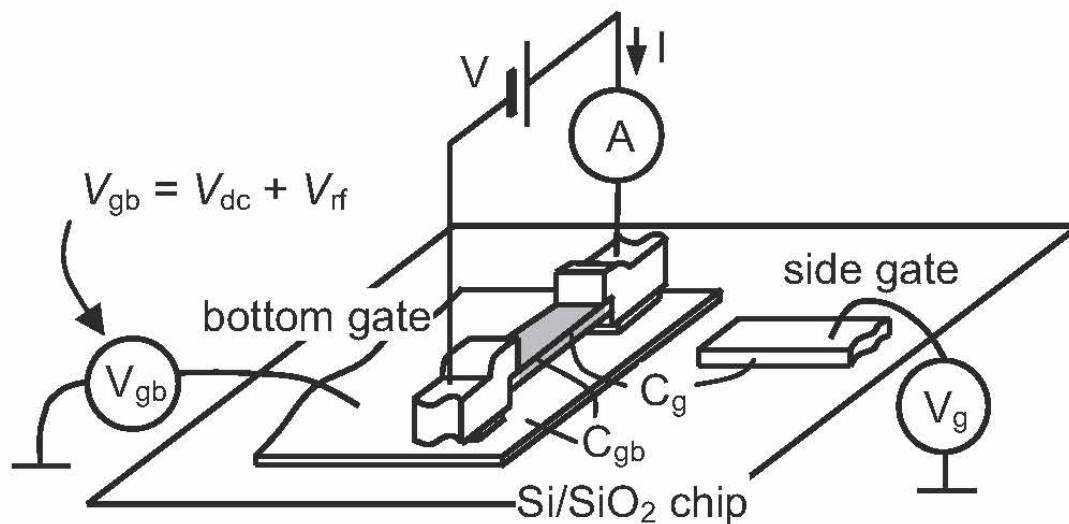
c.

Рассмотрим теперь то же одноэлектронное устройство, но подключенное к источнику напряжения, а не источнику тока. В идеальном источнике напряжения выходное сопротивление  $R = 0$  и поэтому напряжение на туннельном переходе строго фиксировано и равно напряжению источника. Также фиксирован и заряд на островке  $Q = CV$ .

**Ток через туннельный промежуток, поэтому будет в каждый момент времени соответствовать этому напряжению, и SET осцилляции тока будут подавлены !**

Для возникновения осцилляций тока нужно не только большое сопротивление подводов (или источника тока), но и малая паразитная емкость этих резисторов (малые размеры  $< 1\text{мкм}$ ) !

# Связь электрической и механической степеней свободы в SET



Pashkin et al. APL 96, 263513 (2010)

## Эталон тока на основе цепочек SET

Цель: контролируемым образом перекачивать элементарные заряды через электрические цепи.

**Q:** Можно ли создать эталон тока если перекачивать электроны друг за другом, перенося с помощью управляющего напряжения один электрон за один период управляющего напряжения ?



## Эталон тока на основе цепочек SET

Цель: контролируемым образом перекачивать элементарные заряды через электрические цепи.

**A:** Если тупо перекачивать электроны друг за другом, перенося с помощью управляющего напряжения, то потребуется управляющий сигнал с частотой, превышающей  $10^{18}$  Гц. Эта величина примерно на четыре порядка превышает диапазон частот видимого света ( $4 \times 10^{14}$  –  $7.5 \times 10^{14}$  Гц) и попадает в диапазон рентгеновского излучения.

Для построения схем по перекачке электрических зарядов используются сверхпроводники или полупроводники. Это ограничивает частоты. Например, 50 ГГц для Al (щель 200 мкэВ)

Ток всегда прямо связан с частотой  $I = f |e|$ , точность определяется частотой и знанием заряда электрона.

## Эталон тока на основе цепочек SET

Ток всегда прямо связан с частотой  $I = f|e|$ , точность определяется частотой и знанием заряда электрона. Можно подумать, что  $\delta I = \delta f$  и погрешность крайне мала.

Однако, за один период управляющего напряжения через схему не всегда переносится ровно один элементарный заряд. В рабочих циклах могут быть ошибки: пропущенные события, туннелирование двух электронов за один цикл, обратное туннелирование и т. д. Возможно также протекание тока и в отсутствие управляющего сигнала. Поэтому точность перекачки зарядов определяется не столько стабильностью частоты высокочастотного генератора, сколько процессами туннелирования зарядов, которые зависят от конкретных реализаций.

Существуют устройства, в которых заряд переносится большими порциями с целью увеличить значение постоянного тока. За один период переносится заряд  $n \sim 100e$ , и перекачиваемый ток зависит от частоты как  $I = nef$ , достигая 1 нА. Утечки тока (туннелирование) по примесным состояниям в подложке и окружении пока не позволили достичь точность лучше  $10^{-6}$