

Глава 19

Завершающие вопросы теории
ферми-жидкости.

Часть 5

Оглавление

19 Завершающие вопросы теории ферми-жидкости.	
Часть 5	1
19.1 Рассеяние частиц в борновском приближении . . .	4
19.1.1 Концепция пробной частицы	4
19.1.2 Эффективное сечение рассеяния. Дина- мический форм-фактор и корреляции плот- ности	8
19.1.3 Статический форм-фактор	12
19.2 Сохранение числа частиц. Правило f -сумм . . .	15
19.2.1 Флуктуации плотности потока частиц . .	15
19.2.2 Функция линейной реакции	17
19.2.3 Вычисление функции реакции плотность- плотность	21
19.2.4 Связь функции реакции плотность-плотность с динамическим форм-фактором	23
19.2.5 Связь функции реакции плотность-плотность с термодинамической плотностью состоя- ний. Правило сумм для сжимаемости . .	25
19.2.6 Вычисление динамического форм-вактора для газа невзаимодействующих ферми-частиц в случае малых передач импульса	26

19.2.7	Динамический форм-фактор ферми-жидкости. Структура вкладов: коллективные, одно- парные, многопарные	26
19.3	Заряженные системы. Кинетическое уравнение Ландау-Силина	31
19.4	Макроскопическая диэлектрическая реакция квантовой плазмы	40
19.4.1	Заклучение по теории Ферми-жидкости применительно к электронам в металлах	46
19.4.2	Задачи	48

19.1 Рассеяние частиц в борновском приближении

19.1.1 Концепция пробной частицы

Для простоты мы вначале будем предполагать, что рассматриваемая система составлена из частиц не обладающим электрическим зарядом. Любой эксперимент состоит во внешнем воздействии на изучаемую систему и исследовании ее реакции. Если внешнее возмущение достаточно мало, то отклик системы будет пропорционален возмущению и будет определяться свойствами невозмущенной системы. Ответная реакция задается спектром элементарных возбуждений исследуемой системы, который, в свою очередь зависит от корреляций в положениях и импульсах частиц составляющих систему.

Представим себе, что мы собираемся исследовать свойства системы взаимодействующих частиц так, как это делается в ядерной физике, с помощью рассеяния пробной частицы. Пусть пробная частица, отличимая от частиц, составляющих систе-

му, и сами частицы, составляющие систему, - электронейтральны. (Например, в качестве пробной частицы используется нейтрон, а система представляет собой жидкий ^3He).

Пробная частица до рассеяния имела импульс \mathbf{P}_e , массу M и энергию $P_e^2/2M$. Частица рассеивается системой, которая первоначально находилась в состоянии $|0\rangle$ с энергией E_0 . После столкновения пробная частица имеет импульс $\mathbf{P}_e - \mathbf{q}$, а система попадает из основного в возбужденное состояние $|n\rangle$. Энергия этого состояния E_n . Переданный импульс мы можем разбить так, как это показано на рисунке:

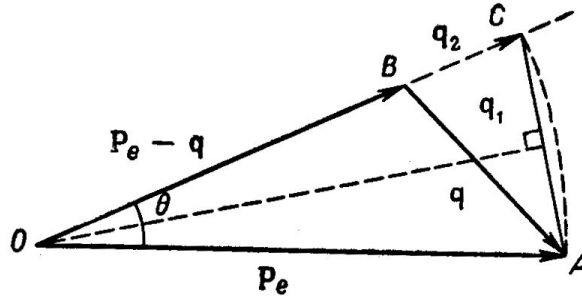


Рис. 19.1: Связь между углом рассеяния, переданной энергией и переданным импульсом при неупругом рассеянии быстрой частицы с импульсом P_e

В силу закона сохранения импульса после столкновения система в состоянии $|n\rangle$ имеет импульс \mathbf{q} . Из закона сохранения энергии также следует

$$\omega \equiv E_n - E_0 = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}_e}{M} - \frac{q^2}{2M} \quad (19.1)$$

Всюду принято $\hbar = 1$.

Тогда столкновение можно характеризовать передачей от частицы к системе импульса \mathbf{q} и энергии ω . Здесь импульс \mathbf{q}_1 соответствует упругому рассеянию на тот же угол, а \mathbf{q}_2 - определяет передачу энергии и не связан с углом рассеяния.

$$\begin{aligned} q_1 &= 2P \sin \frac{\theta}{2} \\ \omega &= q_2 \frac{P_e}{M} - \frac{q_2^2}{2M} \end{aligned} \quad (19.2)$$

В эксперименте мы можем измерять вероятность рассеяния на угол θ с передачей энергии ω . Эти соотношения упрощаются, если переданный импульс мал $\mathbf{q} \ll \mathbf{P}_e$. При этом угол рассеяния θ также мал, вектор \mathbf{q} почти перпендикулярен вектору \mathbf{P}_e , а вектор \mathbf{q}_2 почти параллелен ему. В первом порядке по q имеем

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{\perp} = P_e \theta, \\ q_2 &= q_{\parallel} = \frac{\omega M}{P_e}, \end{aligned} \quad (19.3)$$

В эксперименте угол отклонения θ измеряется просто. Сложнее найти переданную энергию ω . Ее можно определить измеряя скорость рассеянного нейтрона. Измерив обе величины θ и ω легко вычислить весь переданный импульс, модуль которого (см. рисунок 19.1) определяется соотношением

$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (19.4)$$

Для малого угла рассеяния, когда применимы (19.3), вместо (19.4) имеем

$$q = P_e \sqrt{\theta^2 + \left(\frac{\omega}{2E_e} \right)^2} \quad (19.5)$$

19.1.2 Эффективное сечение рассеяния. Динамический форм-фактор и корреляции плотности

Предположим, что взаимодействие пробной частицы с системой не зависит от скоростей пробной частицы и частиц, составляющих систему, а зависит лишь от их координат:

$$H_{\text{int}} = \sum_i \mathcal{V}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_e), \quad (19.6)$$

где \mathbf{R}_e соответствует координате пробной частицы, а \mathbf{r}_i - координаты частиц составляющих систему. Разложим гамильтониан взаимодействия в ряд Фурье

$$H_{\text{int}} = \sum_i \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{V}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_e)} = \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{V}_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}}^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_e}, \quad (19.7)$$

где введено определение: $\mathcal{V}_{\mathbf{q}}$ - фурье компоненты потенциала $\mathcal{V}(\mathbf{r})$,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{q}} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \sum_i \int d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \sum_i e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} \\ \rho_{\mathbf{q}}^+ &= \sum_i e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} \end{aligned} \quad (19.8)$$

Величина $\rho_{\mathbf{q}}$ описывает флуктуации плотности частиц (с компонентной волнового вектора \mathbf{q}) около среднего значения $\rho_0 = N$. Частицы мы считаем точечными.

В борновском приближении пробная частица до и после процесса рассеяния слабо связана с системой. Следовательно, ее импульсы до столкновения и после столкновения являются хорошими квантовыми числами, а собственные функции пробной частицы до и после столкновения являются плоскими волнами.

Матричный элемент перехода системы из основного $|0\rangle$ в точное возбужденное $|n\rangle$ состояние равен:

$$\langle n, \mathbf{P}_e - \mathbf{q} | H_{\text{int}} | 0, \mathbf{P}_e \rangle = \mathcal{V}_{\mathbf{q}} \langle n | \rho_{\mathbf{q}}^+ | 0 \rangle = \mathcal{V}_{\mathbf{q}} (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}, \quad (19.9)$$

Поскольку функция \mathcal{V}_q предполагается известной, то (19.9) зависит только от матричного элемента флуктуаций плотности $\rho_{\mathbf{q}}^+$, взятого по точным собственным функциям состояния многочастичной системы в отсутствие пробной частицы.

Таким образом, пробная частица, играет роль измерительного зонда, позволяющего определить флуктуациями плотности в системе.

Согласно теории возмущений вероятность того, что в единицу времени частица передаст системе импульс \mathbf{q} и энергию ω описывается золотым правилом Ферми:

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 \sum_n \left| (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} \right|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}), \quad (19.10)$$

где $\omega_{n0} = E_n - E_0$, а δ -функция соблюдает сохранение энергии. Суммирование проводится по всем состояниям $|n\rangle$. Применяя (19.10) важно, что ω и q не являются независимыми переменными, а связаны соотношением (19.1). Формально можно ему удовлетворить, умножая (19.10) на дополнительный множитель

$$\delta\left(\omega - \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{P}_e}{M} + \frac{q^2}{2M}\right),$$

который обеспечивает сохранение энергии пробной частицы.

Вероятность перехода (19.10) можно записать так

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) = 2\pi |\mathcal{V}_{\mathbf{q}}|^2 \mathcal{S}(\mathbf{q}, \omega), \quad (19.11)$$

где

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n \left| (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} \right|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}) \quad (19.12)$$

Функция $\mathcal{S}(\mathbf{q}, \omega)$ называется *динамическим форм-фактором*. Она отражает все свойства многочастичной системы, которые проявляются при рассеянии на ней пробной частицы.

Покажем, что динамический форм-фактор связан с корреляциями плотности частиц. В представлении Гейзенберга зависимость от времени флуктуаций плотности $\rho_{\mathbf{q}}^+(t)$ может быть перенесена с волновых функций на операторы (или на вектор состояний) - см. Квантовую механику Ландау и Лифшица:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{q}}^+(t) &= e^{iHt} \rho_{\mathbf{q}}^+ e^{-iHt} \\ \rho_{\mathbf{q}}^+(t)|0\rangle &= e^{iHt} \rho_{\mathbf{q}}^+ e^{-iHt}|0\rangle, \end{aligned} \quad (19.13)$$

где H - полный Гамильтониан системы.

Динамическая корреляция между флуктуациями плотности в моменты времени $t = 0$ и $t = \tau$ выражается корреляционной функцией:

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \tau) = \langle 0 | \rho_{\mathbf{q}}(\tau) \rho_{\mathbf{q}}^+(0) | 0 \rangle \quad (19.14)$$

Разложим величину $\mathcal{S}(\mathbf{q}, t)$ по полному набору функций, описывающему все состояния нашей системы $|n\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{q}, t) &= \langle 0 | \rho_{\mathbf{q}}(\tau) | n \rangle \langle n | \rho_{\mathbf{q}}^+(0) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{iH\tau} \rho_{\mathbf{q}} e^{-iH\tau} | n \rangle \langle n | \rho_{\mathbf{q}}^+(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_n \langle 0 | e^{iH\tau} \rho_{\mathbf{q}} e^{-iH\tau} | n \rangle \langle n | \rho_{\mathbf{q}}^+(0) | 0 \rangle = \sum_n |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 e^{-i\omega_{n0}\tau} \end{aligned} \quad (19.15)$$

Последнее равенство следует из следующих правил квантовой механики:

1. Матричные элементы операторов не изменяются при унитарном преобразовании.

2. $\Psi(\xi, t) = e^{-iHt}\Psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-iHt)^n (1/n!) \sum_k a_k \varphi_k = \sum_n a_n \varphi_n e^{-iE_n t}$.

Сравнивая (19.15) с (19.12) видим, что $\mathcal{S}(\mathbf{q}, \omega)$ получается из $\mathcal{S}(\mathbf{q}, \tau)$ в результате фурье-преобразования. Итак, динамический форм-фактор определяет корреляции между флуктуациями плотности в различные моменты времени, а также частотное распределение состояния $\rho_{\mathbf{q}}^+(t)|0\rangle$, т.е. его спектральную плотность.

19.1.3 Статический форм-фактор

Часто в эксперименте бывает невозможно измерить переданный системой импульс. Пример - определение скорости рассеянных нейтронов времяпролетным методом. Измеряется только угол отклонения θ пробной частицы и потерянная энергия ω , по которым затем вычисляется \mathbf{q} . В этом случае необходимо иметь более грубое описание вероятности рассеяния. Определим дифференциальное сечение рассеяния $\mathcal{P}(\theta, \omega) d\Upsilon d\omega$ с передачей энергии в интервале $\omega, \omega + d\omega$ при рассеянии в телесный угол $d\Upsilon$ следующим образом:

$$\mathcal{P}(\theta, \omega) d\Upsilon = \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) \delta \left(\omega - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}_e}{M} + \frac{q^2}{2M} \right),$$

где суммируем по тем \mathbf{q} , для которых импульс рассеянной частицы лежит в пределах телесного угла $d\Upsilon$.

В общем случае вычислить \mathcal{P} сложно. Однако, если $q \ll P_e$, то используя (19.4) находим

$$\mathcal{P}(\theta, \omega) = \frac{P_e^2}{(2\pi)^3} \int dq_{\parallel} \mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) \delta(\omega - q_{\parallel} V_e), \quad (19.16)$$

где V_e скорость частицы. Переданный импульс \mathbf{q} есть функция от θ и ω , определяемая выражением (19.4) и (19.5).

Зачастую в эксперименте не удается определить даже переданную энергию, следовательно, описание приходится делать еще более грубым. Определим дифференциальное сечение рассеяния на угол θ как

$$\mathcal{P}(\theta) = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(\theta, \omega) d\omega$$

Заменяя $\mathcal{P}(\theta, \omega)$ выражением (19.16) можно найти $\mathcal{P}(\theta)$ интегрированием $\mathcal{P}(\theta, \omega)$ по частоте ω .

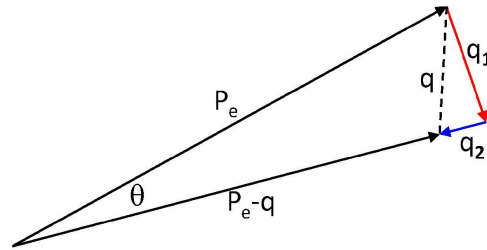


Рис. 19.2: Связь между углом рассеяния и переданным импульсом при неупругом рассеянии частицы с импульсом $q \ll P_e$

Ситуация упрощается когда переданный импульс \mathbf{q} почти не зависит от переданной энергии ω в той области, где рассеяние наиболее значительно. Для неупругого рассеяния это условие выполняется только при $q \ll P_e$, когда применимо (19.16). (Напомним, что $P_e \equiv P$ - это импульс рассеиваемой частицы). На самом деле, в случае $q \ll P$ это предположение

выполняется автоматически. Действительно, в этом случае из рис. 19.2 следует, что

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv q_\perp \approx P\theta, \\ d^3q &= 2\pi q_1 dq_1 dq_2 = 2\pi P^2 \theta d\theta dq_2 = P^2 d\Upsilon dq_2, \\ \omega &\approx q_2 V. \end{aligned}$$

Наконец, используя (19.11) и (19.16) напишем вероятность $\mathcal{P}(\theta)$

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{MP_e}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathcal{P}(\mathbf{q}, \omega) d\omega = \frac{MP_e}{(2\pi)^3} 2\pi |\mathcal{V}_\mathbf{q}|^2 NS_\mathbf{q}, \quad (19.17)$$

где $S_\mathbf{q}$ - статический форм-фактор системы определяется как

$$S_\mathbf{q} = \frac{1}{N} \int_0^\infty d\omega S(\mathbf{q}, \omega) \quad (19.18)$$

Здесь N - число частиц в системе.

Однако, нужно понимать, что для любой системы простое соотношение (19.17) не выполняется, когда скорость частицы V_e сравнима с v_F .

Итак, в соответствии с (19.18) величина $NS_\mathbf{q}$ равна фурье-компоненте $S(\mathbf{q}, t)$ взятой при $t = 0$. Действительно, из (19.12), (19.13) и (19.14) следует, что

$$NS_q = \langle 0 | \rho_\mathbf{q}^+ \rho_\mathbf{q} | 0 \rangle \quad (19.19)$$

Следовательно, $NS_\mathbf{q}$ есть мера одновременных корреляций плотности в системе, т.е. среднего квадрата флуктуаций плотности. Не удивительно поэтому, что рассеяние очень быстрой частицы определяется только величиной $S_\mathbf{q}$.

19.2 Сохранение числа частиц. Правило f -сумм

19.2.1 Флуктуации плотности потока частиц

Оператор, описывающий плотность потока частиц в точке \mathbf{r} запишем в виде

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{p}_i}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \frac{\mathbf{p}_i}{m} \right\} \quad (19.20)$$

где \mathbf{r}_i и \mathbf{p}_i – координата и импульс i -той частицы в системе. Симметризация нужна, т.к. \mathbf{r}_i и \mathbf{p}_i не коммутируют. Фурье преобразование $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ по \mathbf{r} дает

$$\mathbf{J}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{p}_i}{m} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i} \frac{\mathbf{p}_i}{m} \right\} \quad (19.21)$$

Величина $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ есть флуктуация плотности потока с волновым вектором \mathbf{q} . Она является аналогом флуктуаций плотности $\rho_{\mathbf{q}}$. Ясно, что $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ и $\rho_{\mathbf{q}}$ должны быть связаны уравнением непрерывности, которое выражает сохранение числа частиц в системе. Чтобы найти эту связь вычислим коммутатор $[\rho_{\mathbf{q}}, H]$, где H – гамильтониан системы

$$H = \sum_i \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (19.22)$$

Здесь $U(\mathbf{r}_i)$ – внешний потенциал, в котором находятся частицы, а $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ – потенциал взаимодействия между парами частиц.

Сделаем предположение, что U и V не зависят от скорости, а зависят только от координат (и возможно от

спина). Тогда плотность $\rho_{\mathbf{q}}$, которая зависит только от координат, коммутирует с потенциалом и с членами, описывающими взаимодействие. Единственный вклад в коммутатор вносит кинэнергия. Находим:

$$[\rho_{\mathbf{q}}, H] = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_i}{m} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_i}{m} \right\} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}} \quad (19.23)$$

Соотношение (19.23) справедливо, если U и V не зависят от скорости. Оно выражает закон сохранения. Докажем это. Запишем $\rho_{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$ в гейзенберговском представлении. Тогда получается уравнение

$$\frac{\partial \rho_{\mathbf{q}}}{\partial t} = i [\rho_{\mathbf{q}}, H] = -i \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}. \quad (19.24)$$

Это уравнение представляет собой результат фурье-преобразования по координатам известного уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (19.25)$$

которое описывает сохранение числа частиц. Уравнение (19.26) принимает простую форму, если перейти к матричным элементам по собственным состояниям реальной системы.

$$\omega_{n0}(\rho_{\mathbf{q}})_{n0} = -[\mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{q}}]_{n0}. \quad (19.26)$$

Из ур. (19.26) получим правило f -сумм.

Динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ удовлетворяет след. правилу сумм:

$$\int_0^{\infty} \omega S(\mathbf{q}, \omega) d\omega = \frac{Nq^2}{2m}, \quad (19.27)$$

где N - число частиц в системе и m - масса голой частицы. Используя определение (19.12) форм-фактора $S(\mathbf{q}, \omega)$ можно

переписать (19.27) в виде

$$\sum_n \omega_{n0} |(\rho_q^+)_{n0}|^2 = \frac{Nq^2}{2m} \quad (19.28)$$

Для каждого перехода из основного состояния $|0\rangle$ в возбужденное $|n\rangle$ вводят **силу осциллятора**

$$f_{0n} = \frac{2m}{q^2} \omega_{n0} |(\rho_q^+)_{n0}|^2 \quad (19.29)$$

С помощью этого определения записываем правило сумм

$$\sum_n f_{0n} = N. \quad (19.30)$$

Его можно получить из двойного коммутатора $[[\rho_q, H], \rho_q^+]$, выражая его через поток.

Правило f -сумм (19.27) определяет первый момент динамического форм-фактора $S(\mathbf{q}, \omega)$. Перепишем его еще раз

$$\int_0^\infty \omega S(\mathbf{q}, \omega) d\omega = \frac{Nq^2}{2m},$$

В этом смысле оно дополняет определение статического форм-фактора (19.18)

$$NS_{\mathbf{q}} = \int_0^\infty d\omega S(\mathbf{q}, \omega), \quad (19.31)$$

которое дает среднее значение $S(\mathbf{q}, \omega)$. $S_{\mathbf{q}}$ нетрудно выразить через силы осцилляторов f_{0n} .

19.2.2 Функция линейной реакции

Ранее мы изучали переходы в многочастичной систем вызванные посторонней пробной частицей - неупругие необратимые

диссипативные процессы. Но внешняя сила может вызывать и виртуальные переходы - обратимую деформацию системы, соответствующую ее поляризации внешней силой. Это как в электрических контурах реакция на внешний потенциал складывается из диссипативной и реактивной части. Если связь системы с внешней силой слаба, то можно вычислить по теории возмущений реакцию.

В принципе, сила может действовать на некоторую физическую величину A (плотность, ток, спиновая плотность и пр.), а мы хотим вычислить линейную реакцию некоторой другой величины B . Реакцию опишем с помощью функции реакции $B-A$. Первая буква - измеряемая величина, вторая - форма связи с внешней силой. Рассмотрим, для простоты реакцию плотность-плотностью. Пусть в результате внешнего воздействия локально изменяется плотность ферми-системы. Исследуем изменение плотности, вызванные в линейном режиме потенциалом, воздействующим на плотность, т.е. функцию реакции плотность-плотность.

Рассмотрим скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$, который действует на плотность системы посредством гамильтониана взаимодействия. Гамильтониан мы запишем в виде суммы по фурье гармоникам импульса и интеграла от фурье гармоник энергии:

$$H_e = \sum_q \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho_q^+ \varphi(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (19.32)$$

Здесь $\varphi(\mathbf{q}, \omega)$ - фурье-компоненты $\varphi(\mathbf{r}, t)$ по координатам и времени. Т.к. возмущение действительно, то

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = \varphi^*(-\mathbf{q}, -\omega) \quad (19.33)$$

Примером такого скалярного потенциала, может быть взаимодействие с пробной частицей со скоростью \mathbf{V}_e и координатами

\mathbf{R}_e , рассеяние которой изучалось ранее.

Будем предполагать, что внешний потенциал является слабым, реакция системы линейна по возмущению. В таких условиях каждая фурье – компонента действует независимо. Рассмотрим одну из Фурье – компонент в (19.32). Полностью потенциал возмущения для одной гармонике должен быть записан в виде

$$\begin{aligned} H_e &= \rho_{\mathbf{q}}^+ \varphi(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t} + \text{Компл сопр.} = \\ &= \rho_{\mathbf{q}}^+ \varphi(\mathbf{q}, \omega) e^{-i\omega t} + \rho_{\mathbf{q}} \varphi^+(\mathbf{q}, \omega) e^{i\omega t} + \end{aligned} \quad (19.34)$$

С возмущением такого рода вычислить ничего невозможно, поскольку оно действует постоянно (с момента $t = -\infty$ до момента $t = +\infty$), а система под воздействием возмущения с конечной частотой поглощает энергию. Разделим эти две проблемы:

1. В написанном виде возмущение действует в период от $-\infty$ до $+\infty$.
2. Конечная частота приводит к реальным переходам, т.е. к диссипации энергии, и как следствие, к нелинейным эффектам.

Обе эти трудности можно преодолеть правильным выбором начальных условий. Примем адиабатические начальные условия, соответствующие отсутствию возмущения при $t = -\infty$ и очень медленному включению взаимодействия H_e .

Для этого умножим H_e на $\exp(\eta t)$, где η - очень малая величина. $\eta > 0$. Энергия, передаваемая системе, пропорциональна φ_q^2 , а время установления есть $1/\eta$. Т.о. энергия передаваемая системе будет пропорциональна φ_q^2/η . Мы считаем η ненулевой и затем положим $\eta = 0$ в конце вычислений. Нагрева и нелинейных эффектов не будет.

Введем теперь функцию реакции плотность–плотность. Средняя флуктуация плотности в момент времени t вызванная возмущением (19.34) равна:

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}, t) | \rho_{\mathbf{q}} | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (19.35)$$

где $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle$ точная волновая функция системы при наличии возмущения. Так как возмущение периодически во времени, мы можем написать

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle e^{-i\omega t} e^{\eta t}, \quad (19.36)$$

где фурье-компонента $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ вычисляется сл. образом

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}, t) | \rho_{\mathbf{q}} e^{i\omega t} | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle e^{-\eta t}. \quad (19.37)$$

Равенство (19.37) как раз и соответствует периодическому очень медленно нарастающему возмущению.

По определению, *функцию реакции плотность – плотность* выражают величиной:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{\varphi(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (19.38)$$

Таким образом, функция реакции плотность–плотность это нечто вроде восприимчивости системы. Реакция системы не локализована ни в пространстве, ни во времени. Потенциал, действующий в точке \mathbf{r} в момент времени t приводит к изменению плотности в некоторой другой точке в более поздний момент времени t' .

19.2.3 Вычисление функции реакции плотность-плотность

Для вычисления линейного отклика применим теорию возмущений в первом порядке:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H + H_e) |\psi(t)\rangle, \quad (19.39)$$

где H - гамильтониан системы (19.22), H_e - взаимодействие (19.34). Ур. (19.39) нужно решать со след граничным условием: при $t \rightarrow -\infty$ система находится в основном состоянии $|0\rangle$.

Такой вид возмущения выбран нами потому, что реальное возмущение действительно. Тем не менее, мы будем иметь в виду, что функция реакции плотность-плотность определена нами для гармонического возмущения.

В соответствии с методом теории возмущений разложим $\psi(t)$ по различным собственным состояниям $|n\rangle$ гамильтониана H , имеющим энергию E_n :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} |n\rangle \quad (19.40)$$

Наше граничное условие соответствует требованию

$$a_n(-\infty) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \end{cases} \quad (19.41)$$

Подставляя (19.40) в (19.39), интегрируя и сохраняя только члены первого порядка по ϕ , а также воспользовавшись теорией зависящих от времени возмущений получаем (для $n \neq 0$):

$$a_n(t) = \left\{ \frac{(\rho_q^+)_{n0} \varphi(q, \omega)}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} e^{(-i\omega + i\omega_{n0} + \eta)t} - \frac{(\rho_q)_{n0} \varphi^+(q, \omega)}{\omega + \omega_{n0} - i\eta} e^{(i\omega + i\omega_{n0} + \eta)t} \right\} \quad (19.42)$$

Теперь, для нахождения функции реакции плотность – плотность нам необходимо вычислить среднюю q -компоненту плотности возмущенной системы $\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle$. Это мы сделаем с помощью ур. (19.35). Мы будем оставлять только члены первого порядка малости по возмущению, т.е. только те, которые имеют в матричном элементе $|0\rangle$ слева или справа. Кроме того, мы помним, что $\langle 0|\rho_q|0\rangle = 0$ вследствие трансляционной инвариантности.

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \sum_n \{ (\rho_{\mathbf{q}})_{0n} a_n(t) e^{-i\omega_{n0}t} + a_n^+(t) (\rho_{\mathbf{q}})_{n0} e^{i\omega_{n0}t} \} \quad (19.43)$$

Подставим (19.42) в (19.43). В результате громоздкой арифметики, а также используя (19.36) получаем искомую функцию реакции (19.38). При этом нужно воспользоваться инвариантностью относительно обращения времени которое позволяет каждое состояние $|n\rangle$ с импульсом \mathbf{q} связать с другим состоянием $|m\rangle$, имеющим ту же энергию, что и $|n\rangle$, импульс $-\mathbf{q}$ и комплексно сопряженную волновую функцию

$$\sum_n \omega_{n0} |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 = \sum_m \omega_{m0} |(\rho_{\mathbf{q}})_{m0}|^2. \quad (19.44)$$

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n |(\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0}|^2 \frac{2\omega_{n0}}{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{n0}^2}. \quad (19.45)$$

Эта искомая функция реакции плотность-плотность функция описывает реакцию нашей системы на периодическое воздействие с передачей энергии ω и импульса \mathbf{q} .

Эти формулы, связывающие функцию линейной реакции с точными волновыми функциями системы, носят название формул Кубо [15, 16].

19.2.4 Связь функции реакции плотность-плотность с динамическим форм-фактором

По определению [ур. (19.12)], динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ равен

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n \left| (\rho_{\mathbf{q}}^+)_{n0} \right|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}) \quad (19.46)$$

χ можно записать в виде

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \int_0^\infty d\omega' S(\mathbf{q}, \omega') \left\{ \frac{1}{\omega - \omega' + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega' + i\eta} \right\} \quad (19.47)$$

Поэтому, зная $S(\mathbf{q}, \omega)$ можно вычислить функцию реакции. Динамический форм-фактор является спектральной плотностью функции реакции плотность-плотность. При $\omega \rightarrow \infty$ можно разложить фигурные скобки в (19.47) и получить

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow \frac{2}{\omega^2} \int_0^\infty S(\mathbf{q}, \omega') \omega' d\omega' \quad (19.48)$$

Сравнивая (19.48) с правилом f -сумм (19.27) мы видим

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow \frac{Nq^2}{m\omega^2} \quad (\omega \rightarrow \infty) \quad (19.49)$$

Т.о., взаимодействие между частицами не влияет на асимптотику χ .

Разобьем χ на мнимую и действительную части

$$\chi = \chi' + i\chi''.$$

Используем соотношение

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x - a + i\eta} = P \frac{1}{x - a} - i\pi\delta(x - a) \quad (19.50)$$

где P - символ главного значения. Получаем

$$\chi'(\mathbf{q}, \omega) = \int_0^\infty d\omega' S(\mathbf{q}, \omega') P\left(\frac{2\omega'}{\omega^2 - (\omega')^2}\right) \quad (19.51)$$

$$\chi''(\mathbf{q}, \omega) = -\pi\{S(\mathbf{q}, \omega) - S(\mathbf{q}, -\omega)\} \quad (19.52)$$

Т.о., χ' - четная функция а χ'' - нечетная. Обсудим смысл полученного. Функция реакции плотность- плотность и динамический форм-фактор выражаются друг через друга, и следовательно, несут одинаковую информацию. В дальнейшем мы будем вычислять эти величины для различных систем и с разной точностью. С какой из указанных величин начинать вычисления - дело вкуса и удобства.

Форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ характеризует реальные переходы, происходящие в системе под действием внешней силы, т.е. определяет энергию переданную системе. Такие диссипативные процессы описываются мнимой частью функции реакции, подобно тому как диэлектрические потери описываются мнимой частью диэлектрической проницаемости. Действительная же часть χ соответствует обратимой “реактивной” реакции. Полученное соотношение (19.52) справедливо только при $T = 0$. При конечных температурах связь S и χ'' оказывается более сложной.

Для краткости опустим анализ причинного характера реакции системы, который “зашит” в соотношения действительной и мнимой частей. Пропустим соотношения Крамерса-Кронига, которые следуют из анализа причинности и которые важны в оптике.

19.2.5 Связь функции реакции плотность-плотность с термодинамической плотностью состояний. Правило сумм для сжимаемости

В пределе низкочастотного и длинноволнового воздействия на систему фермионов функция реакции плотность –плотность описывает реакцию системы на статическое макроскопическое воздействие, а следовательно, должна выражаться через сжимаемость.

Пусть на отдельную частицу действует статическое поле сил $\mathcal{F}(\mathbf{r})$, соответствующее скалярному потенциалу:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{r}) &= -i\mathbf{q}\varphi(\mathbf{q}, 0)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \text{Компл. сопр.} = \\ &= -i\mathbf{q}\varphi(\mathbf{q}, 0)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + i\mathbf{q}\varphi^+(\mathbf{q}, 0)e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (19.53)$$

где $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ - сила, испытываемая одной частицей. Мы, естественно, предполагаем, что в длинноволновом пределе сила слабо изменяется на характерном атомном расстоянии между частицами. Средняя сила, действующая на единицу объема системы, равна $\rho\mathcal{F}(\mathbf{r})$. Она примерно равна $N\mathcal{F}(\mathbf{r})$. Эта сила вызывает флуктуацию плотности $\delta\rho(\mathbf{r})$. Последнее вызывает дополнительное давление, равное

$$\delta P(\mathbf{r}) = \frac{1}{\kappa N}\delta\rho(\mathbf{r}).\quad (19.54)$$

В статическом равновесии градиент давления должен компенсировать внешнюю силу.

$$N\mathcal{F} = \nabla P\quad (19.55)$$

Из (19.53) – (19.55) получаем

$$\begin{aligned}\delta\rho &= -N^2\kappa\varphi(\mathbf{q}, 0)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + \text{Компл. сопр.} = \\ &= -N^2\kappa\varphi(\mathbf{q}, 0)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} - N^2\kappa\varphi^+(\mathbf{q}, 0)e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (19.56)$$

Последнее равенство означает, что предел функции реакции плотность-плотность равен:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(\mathbf{q}, 0) = -N^2 \kappa \quad (19.57)$$

т.е., термодинамической плотности состояний.

Здесь можно сжимаемость заменить скоростью первого звука s :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(\mathbf{q}, 0) = -\frac{N}{ms^2} \quad (19.58)$$

Наконец, можно с помощью (19.52) записать (19.58) в виде правила сумм, которому удовлетворит динамический форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{N}{2ms^2} \quad (19.59)$$

Это называется правилом сумм для сжимаемости.

19.2.6 Вычисление динамического форм-вектора для газа невзаимодействующих ферми-частиц в случае малых передач импульса

19.2.7 Динамический форм-фактор ферми-жидкости. Структура вкладов: коллективные, однопарные, многопарные

Как уже упоминалось, возбужденное состояние нейтральной ферми-жидкости должно иметь то же число частиц, что и основное состояние, но обладать импульсом \mathbf{q} . Это возможно при возбуждении одной частицы и появлении одного пустого места: т.е. при однопарном возбуждении. Возможны, также многопарные возбуждения, соответствующие рождению многих

частиц и появлению многих пустых мест. Помимо индивидуальных возбуждений, флуктуации плотности могут быть связаны с коллективными модами. В нейтральной системе представителем коллективных мод является нулевой звук.

Вычислим для примера простейший случай - $S(\mathbf{q}, \omega)$ для невзаимодействующего ферми-газа. Основное состояние $|0\rangle$ получается заполнением всех состояний типа плоских волн внутри ферми-сферы радиусом p_F . Оператор \mathbf{p}_q^+ , действуя на $|0\rangle$ вызывает переход из состояния \mathbf{p} в состояние $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. В представлении вторичного квантования

$$\mathbf{p}_q^+ = \sum_{\mathbf{p}\sigma} C_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\sigma}^+ C_{\mathbf{p},\sigma} \quad (19.60)$$

Далее для простоты опустим спиновый индекс. Мы можем рассматривать \mathbf{p}_q^+ как суперпозицию пар частица-дырка с полным импульсом \mathbf{q} , поскольку рассеяние можно представить в виде рождения пары “частица-дырка”. В силу запрета Паули разрешенным значениям \mathbf{p} соответствует на Рис. (19.3) заштрихованная площадь в виде полумесяца.

Они лежат между ферми-сферой S_F и сферой, полученной ее переносу на вектор $-\mathbf{q}$. Спектр возбуждений можно найти: он образует континуум. Энергии ω_{pq}^0 которые может иметь возбужденная пара лежат в заштрихованной области на рисунке 19.4. Вне этой области форм-фактор равен нулю. На рисунках 19.4 приведен график $S(\mathbf{q}, \omega)$ для $q < 2p_F$ и $q > 2p_F$.

Когда $q \ll p_F$, для практических применений можно считать форм-фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$ линейным по ω в интервале $0 < \omega < qv_F$. Тот факт, что $S(q, \omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$ соответствует принципу Паули, согласно которому число возбуждений с малой энергией невелико.

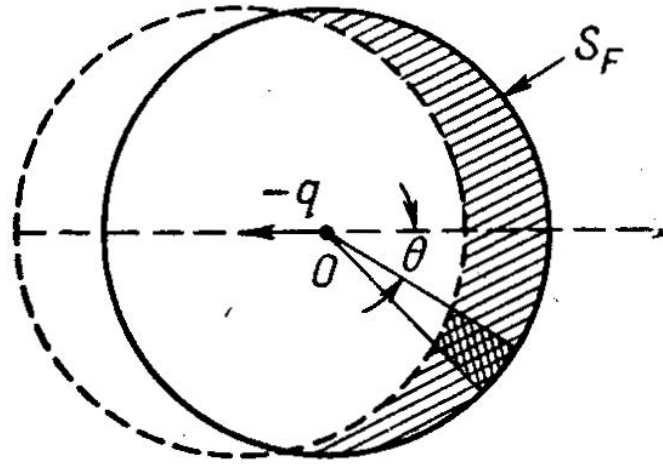


Рис. 19.3: Область импульсного пространства, соответствующая разрешенным значениям \mathbf{p} (заштрихованный полумесяц). В этой области, определяемой неравенствами $p < p_F$, $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| > p_F$ могут возникать однопарные возбуждения с полным импульсом \mathbf{q}

Во взаимодействующей ферми-жидкости возможны различные типы возбуждений

Рассмотрим вклад каждого типа возбуждений более подробно:

1. Однопарные возбуждения.

Спектр качественно похож на спектр ранее рассмотренных однопарных возбуждений у невзаимодействующих ферми-частиц. При $q \ll p_F$ имеет резкую границу, при $q \approx p_F$ граница размыта. Основное отличие от случая невзаимодействующих частиц состоит в том, что $|\rho_q^+|$ не равен единице. Поэтому зависимость форм-фактора от частоты, оставаясь качественно похожей на случай невзаимодействующего ферми-газа, может быть более сложной.

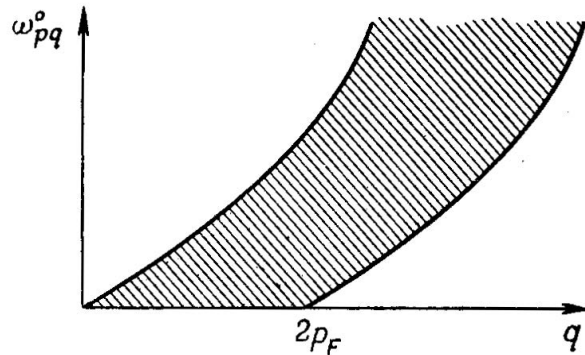


Рис. 19.4: Энергетический спектр однопарных возбуждений

2. Многопарные возбуждения.

При сохранении импульса энергия многопарных возбуждений простирается от нуля до бесконечности. Число многопарных комбинаций в интервале $d\omega$ максимально при энергии возбуждения масштаба фермиевской. В результате мы имеем следующую качественную картину для динамического форм-фактора:

В области малых частот требуется только учет одних однопарных возбуждений. Действительно, вследствие сохранения энергии, каждая из $2n$ частиц многопарного возбуждения (n пар) должна лежать в интервале ω от ферми-поверхности. Число конфигураций, в которых $2n$ частиц располагаются в интервале ω , равно ω^{2n} . Однако суммарная энергия всех возбуждений лежит в интервале $d\omega$, что уменьшает степень до ω^{2n-1} . Для двухпарных возбуждений это означает, что соответствующий вклад в динамический форм фактор будет пропорционален ω^3 . Теория ферми-жидкости Ландау соответствует пренебрежению многопарными возбуждениями. Поскольку $S(q, \omega)$ в низких частотах качественно подобен в случаях присутствия и отсутствия взаимодействия, в качестве модели мы в дальнейшем попробуем использовать динамический форм-

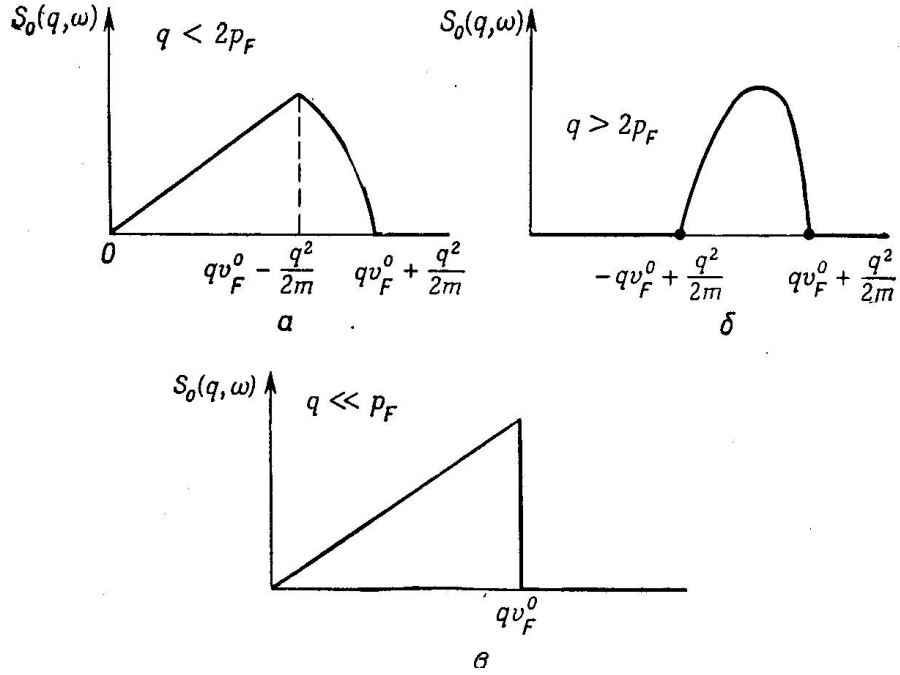


Рис. 19.5: Динамический форм-фактор системы невзаимодействующих частиц для (а) $q < 2p_F$, (б) для $q > 2p_F$ и для (в) $q \ll p_F$

фактор невзаимодействующего газа.

3. Коллективные возбуждения.

В нуль-звуковой моде основное состояние $|0\rangle$ связано посредством ρ_q^+ с единственным состоянием, содержащим один квант нулевого звука с волновым вектором \mathbf{q} и энергией ω . Казалось бы удивительным, что единственное состояние вносит в $S(\mathbf{q}, \omega)$ такой же по величине вклад, что и возбуждения многих индивидуальных пар (число которых порядка N). Но это легко понять, т.к. коллективная мода связана с когерентным движением всех квазичастиц. матричный элемент $(\rho_q^+)_{n0}$ с возбуждением кванта нулевого звука соответствует сумме членов (по одному на каждую квазичастицу, участвующую в нулевом звуке). Эти члены интерферируют, так что в результате

19.3. Заряженные системы. Кинетическое уравнение Ландау-Силина 31

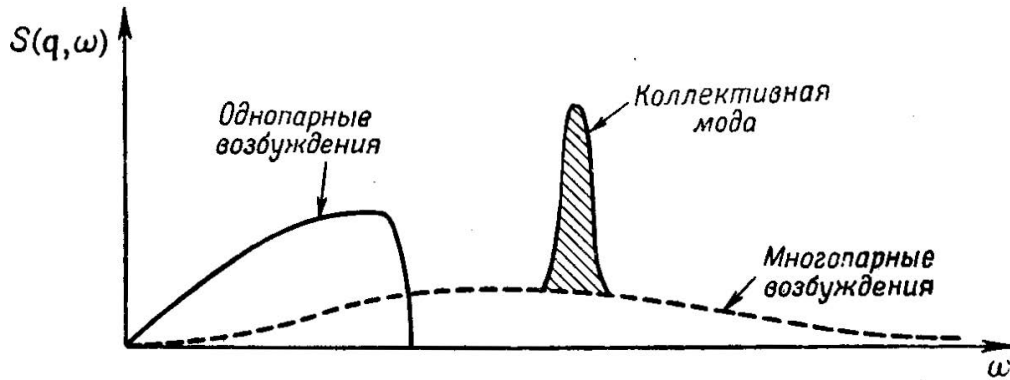


Рис. 19.6: Схематическое изображение различных вкладов в $S(q, \omega)$ для взаимодействующей ферми-жидкости

$|(\rho_q^+)_{n0}|^2$ оказывается в N раз больше, чем вероятность любого индивидуального возбуждения пар.

Вклад, вносимый незатухающей нуль-звуковой модой в динамический форм-фактор, представляет собой одиночный дискретный пик.

19.3 Заряженные системы. Кинетическое уравнение Ландау-Силина

Теория ферми-жидкости Ландау может быть распространена на системы с кулоновским взаимодействием, если самосогласованным образом учесть эффекты динамического экранирования [2].

Рассмотрим состояние, характеризуемое функцией распределения

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = n_{\mathbf{p}}^0 + \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \quad (19.61)$$

Как и ранее, отклонение $\delta n_{\mathbf{p}}$ от основного состояния мало. Оно содержит только длинноволновые флуктуации и не рав-

но 0 только вблизи ПФ, где КЧ хорошо определены. Снова рассматриваем полную энергию как функционал от функции распределения $E[n_p(\mathbf{r}, t)]$. Если тупо разлагать этот функционал по степеням δn_p , то возникают трудности, связанные с энергией взаимодействия двух КЧ

$$f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}'),$$

В.П. Силин впервые предложил [1], что эти трудности снимаются, если учесть динамическое экранирование, т.е. строить теорию учитывая с самого начала образование динамически экранирующего облака. Взаимодействие между двумя экранированными частицами, в отличие от исходного кулоновского, является короткодействующим.

Предложенный Силиным алгоритм состоит в следующем:

1. Рассмотрим электростатическое взаимодействие возбужденной КЧ со средним полем, создаваемым остальными КЧ. Отклонение от равновесия приводит к флуктуациям плотности, средняя флуктуация которых есть

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \quad (19.62)$$

и, значит, к электрическому полю $\mathcal{G}(\mathbf{r}, t)$ пространственного заряда

$$\text{div } \mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = 4\pi e \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \quad (19.63)$$

Эту часть взаимодействия между КЧ учитываем в кин. уравнении, введя $\mathcal{G}(\mathbf{r}, t)$ как дополнительное приложенное поле, приводящее к экранированию поля созданного данной КЧ.

19.3. Заряженные системы. Кинетическое уравнение Ландау-Силина³³

2. Каждая возбужденная КЧ окружена поляризационным облаком других КЧ. Взаимодействие между КЧ экранируется, обрезаясь вплоть до атомных размеров. Мы при этом, однако, не учитываем корреляции между КЧ и не учитываем флуктуации поляризационного облака. Оба этих фактора за пределами простого кулона.

Итак, имеем систему КЧ с малым радиусом взаимодействия. Снова вводим энергию парного взаимодействия $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. Приходим к локальной энергии возбуждения КЧ

$$\tilde{\varepsilon}_p(\mathbf{r}) = \varepsilon_p + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}) \quad (19.64)$$

Кин уравнение выводится точно также, как и ранее в Части 3. Повторяем ур. (18.10) условие близости квазичастиц к ПФ $\nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^0 = -\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_p - \mu)$. В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_p - \mu) \cdot \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}'} - e \mathcal{G}_p \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_p - \mu) = 0. \quad (19.65)$$

Это уравнение в отсутствии внешнего поля и без учета столкновений. Поляризационное поле \mathcal{G}_p определяется ур. (19.63). Рассматриваем периодическое возмущение с волновым вектором \mathbf{q} и частотой ω , тогда в фурье-компонентах это уравнение имеет вид

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \omega) \delta n_p + i \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_p - \mu) \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'} - e \mathcal{G}_p \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_p - \mu) = 0, \quad (19.66)$$

где поляризационное поле \mathcal{G}_p

$$\mathcal{G}_p = -i \mathbf{q} \frac{4\pi e}{q^2} \sum_p \delta n_p \quad (19.67)$$

Объединяя (19.66) и (19.67) получаем окончательно красивый результат

$$i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) \delta n_p + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \delta(\varepsilon_p - \mu) \sum_{p'} \left(f_{pp'} + \frac{4\pi e^2}{q^2} \right) \delta n_{p'} = 0. \quad (19.68)$$

Как видим, коэффициент Фурье для полного взаимодействия между квазичастицами описывается суммой

$$(f_{pp'} + 4\pi e^2/q^2), \quad (19.69)$$

в которой $f_{pp'}$ не имеет сингулярности при нулевой передаче импульса.

Обсудим этот результат.

- Для нейтральной системы $f_{pp'}$ остается регулярным при $\mathbf{q} \rightarrow 0$.
- Для заряженной системы полное взаимодействие сингулярно вследствие большого радиуса кулоновского взаимодействия.
- Чтобы обойти эту трудность, мы выделили сингулярный член $4\pi e^2/q^2$ и рассмотрели его с помощью среднего поляризованного поля, действующего на электроны. Оставшаяся часть представляет собой экранированное взаимодействие $f_{pp'}$, которое регулярно при $\mathbf{q} \rightarrow 0$.

Уравнение Ландау-Силина (19.68) справедливо в отсутствии внешних полей при выполнении следующих условий: Волновые векторы и частоты должны быть макроскопическими:

$$\omega \ll \mu, \quad qv_F \ll \mu,$$

19.3. Заряженные системы. Кинетическое уравнение Ландау-Силина 35

а частота столкновений ν должна быть малой:

$$\nu \ll \omega \quad \text{или} \quad \nu \ll qv_F.$$

Уравнение Ландау-Силина позволяет описать многие макроскопические свойства бесстолкновительной плазмы, в частности, найти ее диэлектрическую проницаемость. В последнем случае в уравнение необходимо ввести внешнее возмущение в виде плоской монохроматической волны. Мы не будем проводить соответствующих вычислений, а приведем только ответ для трехмерных систем:

Добавим внешнее продольное поле

В кин.уравнении (19.65) нетрудно учесть внешнее продольное поле $\mathcal{D}_{\text{exterior}}(\mathbf{r}, t)$. Заряд КЧ равен e и сохраняется при включении взаимодействия, поэтому сила, которую испытывает КЧ со стороны этого стороннего поля есть

$$\mathcal{F} = e\mathcal{D}_{\text{exterior}}(\mathbf{r}, t) \quad (19.70)$$

Поэтому добавим в ур. (19.65) обусловленный этой силой член

$$-e\mathcal{D}_{\text{exterior}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_p \delta(\varepsilon_p - \mu). \quad (19.71)$$

Рассмотрим 2 ситуации

1. *Неоднородное продольное внешнее поле.* В этом случае $\mathcal{D}_{\text{exterior}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$. На электроны действует эффективное экранированное поле $\mathcal{G}(\mathbf{r}, t)$. Реакцию электронов можно получить из ур. (19.65) в котором \mathcal{G}_p нужно заменить на \mathcal{G} учитывая соотношение (18.54) из Части 4. Повторим его

$$\mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\mathcal{D}(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (19.72)$$

Получаем

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon(\mathbf{q}, \omega)\mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega),$$

где $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ определяется соотношениями (18.55) или (18.56) из Части 4. Повторим их также

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbf{q}, \omega) &= 1 + 4\pi i e \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{(\mathbf{q} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega))} \\ \epsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) &= 1 - 4\pi i e \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle}{(\mathbf{q} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{q}, \omega))}\end{aligned}$$

Динамическое экранирование играет существенную роль при определении реакции электронов и позволяет самосогласованное вычисление этой реакции.

2. *Однородное продольное внешнее поле* $q \equiv 0$. В этом случае экранирование отсутствует. Поляризационное поле могло бы создаваться только поверхностным зарядом на границах, который исключается нашими введенными граничными условиями. Поэтому имеем

$$\mathcal{G}(0, \omega) = \mathcal{D}_{\text{exter}}(0, \omega). \quad (19.73)$$

И в том, и в другом случае следует пользоваться кинетическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_p + \mathbf{v}_p \cdot \nabla_r \delta n_p + \mathbf{V}_p \cdot \left[\sum_{p'} f_{pp'} \nabla_r \delta n_{p'} - e\mathcal{G} \right] \delta(\epsilon_p - \mu) = 0. \quad (19.74)$$

Различие между однородным и неоднородным полем сказывается только на виде связи \mathcal{G} с \mathcal{D} .

Сравнение заряженных и нейтральных систем

Мы видели, что характерное отличие электронной системы от нейтральной проявляется в реакции на неоднородное продоль-

19.3. Заряженные системы. Кинетическое уравнение Ландау-Силина 37

ное электрическое поле: в этом случае возникают флуктуации заряда. Тогда дальнодействующий характер взаимодействия приводит к необходимости ввести с самого начала поле пространственного заряда ответственного за динамическое экранирование взаимодействия частиц.

Большую часть равновесных свойств электронного газа, связанных с однородными возмущениями, можно рассматривать в полной аналогии с нейтральной системой. Имеется одно важное исключение: сжимаемость электронной системы. При вычислении сжимаемости предполагают, что равномерно распределенный положительный заряд сжимается вместе с электронами, так чтобы повсюду выполнялось условие нейтральности. Но эта точка зрения противоположна той, которая лежала в основе предыдущего обсуждения, где мы молчаливо предполагали, что положительный фон остается однородным. Поэтому обсудим еще раз вычисление сжимаемости из Части 1.

Для нейтральной системы мы предполагали, что сила $\mathcal{F}(\mathbf{r})$, с которой продольное внешнее поле действует на единицу объема, уравновешивается распределением давления $\delta P(\mathbf{r})$, так что

$$\nabla \delta P = \mathcal{F}(\mathbf{r}) \quad (19.75)$$

Дополнительное давление δP изменяет плотность на

$$\langle \delta \rho \rangle = \kappa N \delta P, \quad (19.76)$$

где κ - сжимаемость. Пропедевывая эти вычисления можно получить, что сжимаемость системы электронов связана с энергией экранированного взаимодействия квазичастиц $f_{pp'}$ так же, как и в случае нейтральной системы:

$$\kappa = \frac{1}{N^2} \frac{p_F m^*}{\pi^2 \hbar^3} \frac{1}{1 + F_0^s} \quad (19.77)$$

Сравнение плазменных колебаний с нулевым звуком

Коллективная мода всегда соответствует колебаниям системы в отсутствие внешнего поля. В нейтральной системе единственной силой, явно приложенной к частицам, является внешняя сила \mathcal{F} . Поэтому коллективные моды описываются уравнением (19.78) из Части 3, в котором нужно положить $\mathcal{F} = 0$. Повторим его еще раз

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta \tilde{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{F}_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial n_p^0}{\partial \varepsilon_p} \right) = I(\delta n_p). \quad (19.78)$$

Но такое уравнение неприменимо к продольным колебаниям заряженной ферми-жидкости. В этом случае флуктуации плотности приводят к появлению поля пространственного заряда \mathcal{G}_p , которое заставляет электроны двигаться. Иначе говоря, имеется обратная связь реакции электронов с электрическим полем \mathcal{G}_p , в котором находится система. Чтобы описать продольные колебания электронного газа, нужно решать совместно кинетическое уравнение (19.66) и уравнение Пуассона (19.67). **В этом заключается отличие продольных колебаний в заряженной и нейтральной ферми-жидкостях.**

Особое поведение заряженных систем наиболее ярко проявляется когда мы объединяем (19.67) и (19.67) в одно уравнение (19.68). Сингулярный член $4\pi e^2/q^2$ во взаимодействии сказывается на длинноволновых продольных колебаниях. Действительно, при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ можно пренебречь величиной $f_{pp'}$ по сравнению с $4\pi e^2/q^2$. Тогда решение уравнение (19.68) получаем сразу. В случае трансляционно-инвариантной системы продольная коллективная мода имеет частоту $\omega = \omega_p$. Это есть плазменные колебания. Вообще, легко показать, что дисперсионное уравнение для продольных коллективных мод, описываемых

19.3. Заряженные системы. Кинетическое уравнение Ландау-Силина 39

уравнением (19.68) идентично уравнению (18.64) из Части 4.

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega_q) = 0.$$

Оно и определяет частоту плазменных колебаний.

Т.о. плазменные колебания соответствуют “нуль-звуковой моде” в заряженной жидкости. В пределе длинных волн частота этой моды сильно смещается из-за большого радиуса кулоновского взаимодействия: линейный спектр $\omega = s_0 q$, характерный для нейтральной ферми-жидкости, заменяется постоянной частотой $\omega = \omega_p$, когда $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Математически это различие обусловлено сингулярным членом $4\pi e^2/q^2$ во взаимодействии в уравнении (19.68).

19.4 Макроскопическая диэлектрическая реакция квантовой плазмы

Вычислим с помощью ур. Ландау-Силина (19.74) макроскопическую диэлектрическую реакцию. Ограничиваемся линейным приближением и для этого рассмотрим внешнее поле \mathcal{D} в виде плоской волны

$$\mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{D} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{\eta t} \quad (19.79)$$

Поставим цель переписать (19.74), используя “локальное” распределение $\delta \tilde{n}_{\mathbf{p}}$. Отклонения функции распределения от *локального* основного состояния $\tilde{n}_{\mathbf{p}}^0$ описывается соотношением

$$\delta \tilde{n}_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}} - \tilde{n}_{\mathbf{p}}^0 = \delta n_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \delta n_{\mathbf{p}'} \quad (19.80)$$

Теперь, используя $\delta \tilde{n}_{\mathbf{p}}$, можно привести наше основное кинуровнение к виду

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta \tilde{n}_{\mathbf{p}} - \omega \delta n_{\mathbf{p}} + ie \mathcal{D} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) = 0 \quad (19.81)$$

Уравнения (19.80) и (19.81) соответствуют одному интегральному уравнению для величины $\delta n_{\mathbf{p}}$. Решать его гораздо сложнее, чем соответствующее уравнение для не- или слабо-взаимодействующей системы, где $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = 0$ и ($\delta \tilde{n}_{\mathbf{p}} = \delta n_{\mathbf{p}}$). Но в некоторых случаях можно найти точное решение уравнения Ландау-Силина. Приведем несколько примеров.

Вычисление диэлектрической реакции с помощью уравнения (19.81) похоже на вычисление корреляционной функции плотность-плотность для нейтральной системы. Последнюю величину обозначим $\chi^n(\mathbf{q}, \omega)$, для того, чтобы отличать ее от корреляционной функции для электронного газа.

19.4. Макроскопическая диэлектрическая реакция квантовой плазмы 41

Можно сконструировать функцию псевдореакции электронной системы взяв за основу реакцию нейтральной системы с теми же N , ε_p и $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. С помощью определения ε (19.73) находим

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^n(\mathbf{q}, \omega) \quad (19.82)$$

Отсюда можно получить асимптотические выражения для ε в пределе длинных волн, а можно получить их из кинуровнения.

Экранирование статического продольного поля ($\omega \equiv 0$)

Пусть статическое поле \mathcal{G} направлено параллельно \mathbf{q} .

Вывести эти же результаты из кинуровнение (19.81).

Для такой геометрии вместо (19.81) получаем

$$\delta\tilde{n}_p = -\frac{ie}{q} \mathcal{E} \delta(\varepsilon_p - \mu). \quad (19.83)$$

Так как отклонение $\delta\tilde{n}_p$ изотропно и не зависит от спина, то связь между $\delta\tilde{n}_{lm}^{a,s}$ и $\delta n_{lm}^{a,s}$ [см. формулы (18.35) в Лекции 1-2)] упрощается:

$$\delta n_p = \frac{\delta\tilde{n}_p}{1 + F_0^s}. \quad (19.84)$$

Зная δn_p находим $\langle \rho \rangle$:

$$\langle \rho \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} = -\frac{3iNem^*}{qp_F^2(1 + F_0^s)} \mathcal{E} \quad (19.85)$$

Используя выражение для скорости звука s упрощаем это выражение

$$\langle \rho \rangle = -\frac{iNe}{qms^2} \mathcal{E} \quad (19.86)$$

и подставляя (19.86) в (19.73) находим

$$\varepsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m s^2 q^2} \quad (19.87)$$

Это результат, конечно, справедлив только для малых q . Сравним этот результат с результатом в приближении Томаса-Ферми. Для удобства сравнения перепишем его в виде

$$\varepsilon_{TF}(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{q_{TF}^2}{q^2} = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m q^2 (v_F^2/3)} \quad (19.88)$$

Видно, что точный результат теории Ландау отличается скоростью звука: макроскопическое значение для взаимодействующей системы в теории Томаса Ферми заменяется просто скоростью $v_F/\sqrt{3}$. Понятно, что это происходит потому, что в теории Ландау принимается во внимание взаимодействие частиц, описываемое дополнительным силовым членом в (19.74), пропорциональным $f_{pp'}$ (т.е. разности между $\delta\tilde{n}_p$ и δn_p).

Можно также выразить статическую диэлектрическую проницаемость через сжимаемость (учитывая, что объем $\Omega = 1$):

$$\varepsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{q^2} \kappa \quad (19.89)$$

Из (19.87) следует, что радиус экранирования λ_s связан со скоростью звука

$$\lambda_s = \frac{s}{\omega_p},$$

где $\omega_p = (4\pi N e^2/m)^{1/2}$ классическая плазменная частота.

Рассеяние электрона на заряженной примесном ионе

Эту задачу для “одетого” электрона также можно решить с помощью уравнения Ландау-Силина. Пусть точечная примесь

19.4. Макроскопическая диэлектрическая реакция квантовой плазмы 43

с зарядом Ze помещена в начало координат. Она создает “сторонний” электрический потенциал Ze/r , фурье-компонента которого

$$\varphi_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi Ze}{q^2}.$$

В результате, квазичастица с импульсом \mathbf{p} приобретает дополнительную эффективную потенциальную энергию $\mathcal{V}_p^{\text{eff}}(\mathbf{r})$ с фурье-компонентой $\mathcal{V}_{\mathbf{qp}}^{\text{eff}}$. Последнюю величину можно рассматривать как матричный элемент рассеяния из состояния \mathbf{p} в состояние $(\mathbf{p} + \mathbf{q})$. (Это, конечно, в пренебрежении взаимодействием между электронами. Убедимся в этом. Для этого напишем гамильтониан, который описывает взаимодействие электрона с примесью:

$$\sum_i \frac{Ze^2}{r_i} = \sum_{\mathbf{q}} \frac{4\pi Ze^2}{q^2} \rho_{\mathbf{q}}^+ = \sum_{\mathbf{qp}} \frac{4\pi Ze^2}{q^2} C_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ C_{\mathbf{p}}$$

В чем состоит процесс рассеяния: Вследствие кулоновского взаимодействия между электронами вокруг примеси возникает экранирующее облако, что приводит к отклонению $\delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r})$ в распределении квазичастиц. Фурье-компонента этого отклонения равна $\delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{q})$. Эффективная потенциальная энергия $\mathcal{V}_{\mathbf{qp}}^{\text{int}}$ изменяется по двум причинам:

- 1) электростатический потенциал примеси экранируется, поэтому $\varphi_{\mathbf{q}}$ надо разделить на диэлектрическую функцию $\varepsilon(\mathbf{q}, 0)$;
- 2) рассеянная КЧ с импульсом \mathbf{p} взаимодействует с экранирующим облаком посредством экранированного взаимодействия квазичастиц $f_{\mathbf{pp}'}$.

Если Z мало, то реакция электронов на примесь линейна.

Тогда полный эффективный потенциал равен

$$\mathcal{V}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{\text{eff}} = \frac{4\pi Ze^2}{q^2 \varepsilon(\mathbf{q}, 0)} + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \cdot \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{q}). \quad (19.90)$$

Положим $\omega = 0$ и заметим, что экранированное поле примеси равно

$$\mathfrak{G}_{\mathbf{q}} = -i\mathbf{q} \frac{4\pi Ze}{q^2 \varepsilon(\mathbf{q}, 0)}$$

Нетрудно показать [полезно вывести это из (19.80), (19.90)], что эффективная потенциальная энергия квазичастицы в поле примеси $\mathcal{V}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{\text{eff}}$

$$\delta n_p(q) = -\mathcal{V}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{\text{eff}} \delta(\varepsilon_p - \mu) \quad (19.91)$$

и эта же величина $\mathcal{V}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{\text{eff}}$ есть матричный элемент перехода квазичастицы из состояния \mathbf{p} в состояние $(\mathbf{p} + \mathbf{q})$.

Отклонение $\delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$ от равновесного значения дается формулами (19.83) и (19.84). Подставляя их в (19.90) находим

$$\mathcal{V}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{\text{eff}} = \frac{4\pi Ze^2}{q^2} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{q}, 0)} \frac{1}{1 + F_0^s} \quad (19.92)$$

Это справедливо только в пределе длинных волн. Далее, используя (19.87) и (18.61) из Лекции 1-2 поучительно это выражение переписать (19.92) как

$$\mathcal{V}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{\text{eff}} = Z \frac{p_F^2}{3m^*N} = \frac{Z}{\nu(0)} \quad (19.93)$$

где $\nu(0)$ плотность состояний на единичный интервал энергии на ферми-поверхности.

Теперь обсудим смысл выражения (19.90). Первый вклад в эффективный потенциал связан с кулоновским взаимодействием электрона со средним зарядом экранированного обла-

ка (облако приводит к диэлектрическому экранированию поля примеси). В первом порядке этот член соответствует прямым процессам в приближении Хартри (см. далее). Второй член описывает экранированное взаимодействие с отдельными электронами экранирующего облака; в первом порядке он учитывает вклад обменного рассеяния налетающего электрона с импульсом p на электронах экранирующего облака. Вообще говоря, две поправки, учитывающие экранирование и обменное рассеяние стремятся компенсировать друг друга, поэтому коэффициент F_0^s выпадает из окончательного результата (19.93). Взаимодействие электронов сказывается только на плотности состояний $\nu(0)$.

Квазистатическая реакция ($0 < \omega \ll qv_F$)

Теперь рассмотрим почти статическое продольное поле. Электроны, движущиеся в фазе с волной, т.е. со скоростью \mathbf{v}_p , удовлетворяюще условию

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p = \omega$$

будут интенсивно поглощать энергию. Так как по условию $\omega \ll qv_F$ и $v_p = v_F$, то эти электроны движутся почти перпендикулярно \mathbf{q} .

Найдем решение кинуравнения (19.81) с точностью до членов порядка ω/qv_F . Тогда вместо (19.87) получим

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2 q^2} \left\{ 1 + i \left(\frac{\pi}{6} \right) \frac{\omega}{qp_F} \left(\frac{p_F^2}{ms^2} \right) \right\} + \dots \quad (19.94)$$

Новый диссипативный член в диэлектрической проницаемости стремится к 0 при $\omega \rightarrow 0$, как и должно быть. Напомним, что q есть фурье-компонента потенциала.

19.4.1 Заключение по теории Ферми-жидкости применительно к электронам в металлах

Рассмотрение и применение теории Ферми-жидкости можно продолжать и продолжать. Таким же способом в теории Ландау рассматривается отклик на движущийся заряд, отклик на электромагнитное поле, экранирование электромагнитного поля и пр. и пр. Но пора сделать общее заключение.

Понятно, что в реальных металлах вследствие анизотропии решетки ε_p зависит от направления \mathbf{p} , а $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ зависит как от \mathbf{p} , так и от \mathbf{p}' . Вследствие периодичности и анизотропии решетки ток переносимый теперь равен

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m_b} \quad (19.95)$$

где m_b - зонная кристаллическая масса, которая должна использоваться вместо голой массы (как для трансляционно-инвариантной системы). Реальная перенормированная эффективная масса квазичастиц m^* выражается через скорость квазичастиц на ферми-поверхности

$$\mathbf{V}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m^*} \quad (19.96)$$

Зная m^* можно найти плотность состояний на ферми-поверхности, теплоемкость, амплитуду квантовых осцилляций. Различие между m^* и m_b отражает различие между $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$. Для изотропного металла

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \mathbf{V}_{\mathbf{p}} + \sum_{p'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta(\varepsilon_{p'} - \mu) \mathbf{v}_{\mathbf{p}'} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left(1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \quad (19.97)$$

откуда следует, что

$$m^* = m_b \left(1 + \frac{F_1^s}{3} \right) \quad (19.98)$$

19.4. Макроскопическая диэлектрическая реакция квантовой плазмы 47

Все это также как и ранее, но голая масса m заменяется на кристаллическую массу m_b .

Аналогично для электронной сжимаемости

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^s} = \frac{m_b}{m} \frac{1 + F_1^s/3}{1 + F_0^s} \quad (19.99)$$

и для спиновой восприимчивости

$$\frac{\chi}{\chi_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^a} = \frac{m_b}{m} \frac{1 + F_1^s/3}{1 + F_0^a} \quad (19.100)$$

Отдельно нужно разобраться с вопросом о том, в какие эффекты входит m^* , m_b и m .

Ясно, что:

- В спиновые эффекты (напр. Зеемановское расщепление) входит m .
- Период квантовых осцилляций определяется квантованием коллективного орбитального движения, не перенормируется и следовательно определяется m_b .
- Во все термодинамические эффекты (теплоемкость, амплитуда квантовых магнитоосцилляций) - входит m^* .
- В частоту циклотронного резонанса (одночастичный процесс переходов между орбитальными уровнями) входит m_b .
- А вот какая масса входит в проводимость Друде ?

В приведенном макроскопическом описании заряженной фермижидкости я пока опустил такие разделы, как Реакция на электромагнитное поле; Теория экранировки Линдхарда; Особенности 2D систем; плазмоны, магнитоплазмоны.

Они представляют интерес и важны, например для случая изучения плазменных волн в 3D и 2D системах, скин-эффекта, аномального скин-эффекта, прохождения электромагнитных волн сквозь металл, плазменных резонансов и пр.

19.4.2 Задачи

1. Показать, что при $q \rightarrow 0$ продольное решение уравнения (19.68) имеет частоту ω_p .

2. Вычислить коэффициент диффузии D для электронной системы. Сравнить результаты с результатами обычной кинетической теории.

3. Вычислить теплопроводность K и проверить закон Видемана-Франца.

4. Вычислить с помощью теории Ландау-Силина диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ в предположении, что взаимодействие не зависит от импульсов: $F_{pp'} = F_0$. Построить графики зависимости $\text{Im } \varepsilon$ и $\text{Re } \varepsilon$ от ω/qv_F .

Литература

- [1] В. П. Силин ЖЭТФ **33**, 495 (1957).
- [2] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статистическая физика , часть 1, «Наука», 1966
- [3] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **32**, 59 (1957).
- [4] T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 43 (1982).
- [5] F. Stern, Phys. Rev. Lett. **18**, 546 (1967).
- [6] Д. Пайнз, Ф. Нозьер, *Теория квантовых жидкостей*, М., Мир, 1967
- [7] P. Nozieres, *Theory of Interacting Fermi Systems* (W.A. Benjamin, 1964) Более техничная чем предыдущая книга, хороша для деталей вычислений.
- [8] L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (McGraw-Hill, 1971).
- [9] G. D. Mahan, *Many particle physics*, Kluwer/Plenum 3rd edition (2000). ISBN 0-306-46338-5
- [10] А.А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, М., Наука, 1987

- [11] W. R. Abel, A. C. Anderson, W. C. Black, J. C. Wheatley, *Thermal and Magnetic Properties of Liquid He3 at Low Pressure and at Very Low Temperatures*, Physics **1**, 337 (1965). УФН **91**, 261 (1967).
- [12] G.S. Uhrig, *Correlated Fermionic Systems: Fermi Liquid and Luttinger Liquid*, Tohoku University, Sendai, Japan (2004)
- [13] W. Kohn, J. Luttinger, Phys. Rev. Lett., **15**, 524 (1956)
- [14] Götz, S. Uhrig, *Correlated Fermionic Systems: Fermi Liquid and Luttinger Liquid*, Tohoku University, Sendai, Japan (2004)
- [15] R. Kubo, Canad. J Phys. **34** 1274 (1956).
- [16] R. Kubo, J Phys. Soc. Japan **12** 570 (1957).