

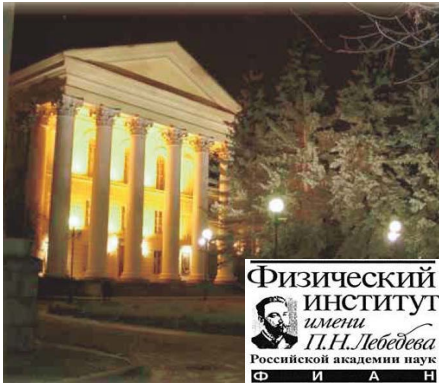
ОП

Физика сверхпроводимости и квантовых материалов

Руководитель: В.М. Пудалов, чл.-кор. РАН
(pudalov@lebedev.ru), **7(499)132-67-80**

База:

Центр высокотемпературной сверхпроводимости и квантовых материалов им. В.Л. Гинзбурга («**Центр Гинзбурга**»)
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН +



Лекция.

«Перенос заряда квантовыми и классическими электронами. Когерентность электронных волн, размерность пространства»

В.М. Пудалов

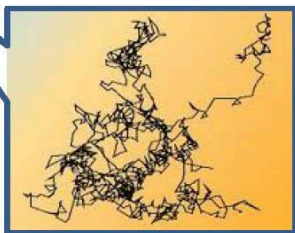
Диффузионный транспорт. Теория Друде (1900)

Квантовая теория не существовала в 1900г.!

Друде трактовал электроны как заряженный газ, движущийся диффузно согласно Больцмановской кин. теории (статистика Максвелла-Больцмана)



$E=0$

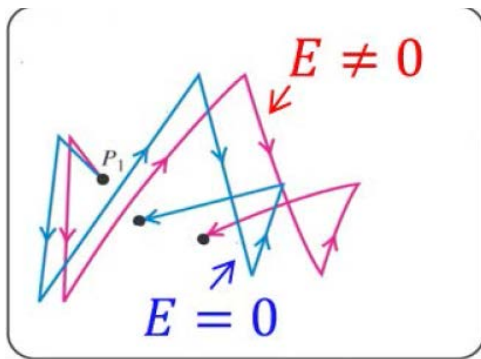


Скорость случайного движения электронов:

Оценка (**неверная**) $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T$

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.4 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \text{K}}{9 \cdot 10^{-28}}} \approx 10^7 \text{ см/с}$$

Диффузионный транспорт



Определение:

$\lambda_F, l_i, l \ll L$ Диффузионный классический

$\lambda_F, l \ll L, l_i$ Диффузионный квантовый

l – длина пробега (релаксация импульса)

l_i – длина релаксации энергии

Классический подход Друде

Электроны движутся изотропно со средней скоростью $\langle v \rangle$.

$\langle v \rangle = 0$ при $E = 0$

Если $E \neq 0$, то на электроны действует сила eE и тогда

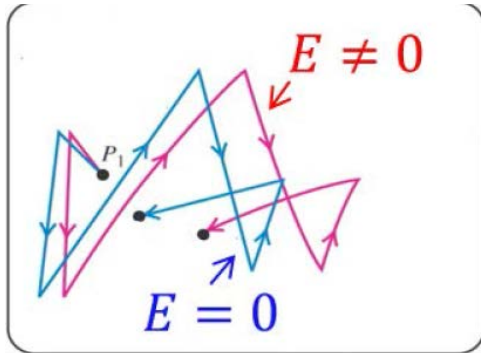
$$\langle v(t) \rangle = -eEt/m$$

$$\bar{v}_d \equiv \langle v(\tau) \rangle = -\frac{e}{m}\tau E \equiv -\mu E,$$

$$\sigma = \frac{\bar{j}}{E} = \frac{-en_e \langle \bar{v} \rangle}{E} = \frac{n_e e^2 \tau}{m} = ne\mu$$

Это формула Друде – чисто классическая; в ней нет ничего квантового. Она правильная, несмотря на 2 ошибочных предположения !

Диффузионный транспорт заряда. Оценки



$$I = \frac{ne(v_d \cdot S)}{t}$$

n = концентрация электронов
 e - их заряд
 $S \cdot v_d$ – объем, проходящий за время $t=1$ с через сечение S

Пусть ток $I=1$ А течет через сечение $S=1$ мм², $n=10^{23}$ см⁻³ (медь).

$$v_d = \frac{1A \cdot 3 \cdot 10^9}{10^{23} \cdot 4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-2}} \sim 10^{-2} \text{ см / с}$$



$v = 10^7$ см/с
 Оценка Друде
 (неверная)

Оценим τ и l : $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$

В системе СИ:

σ для Cu($T=300$ К) $=6 \cdot 10^7$ (Ω м)⁻¹, $n \approx 10^{29}$ м⁻³

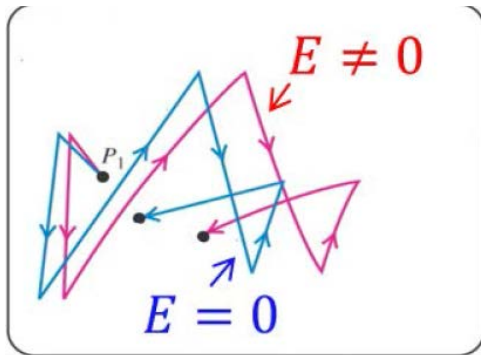
Получаем $\tau(T=300$ К) $\sim 3 \cdot 10^{-15}$ с.

Это время упругих столкновений

$$\langle l \rangle = v \cdot \tau = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 3 \text{ \AA} \sim a_0$$

Поэтому Друде считал, что электроны рассеиваются на каждом атоме!

Диффузионный транспорт заряда. Оценки



$$I = \frac{ne(v_d \cdot S)}{t}$$

n = концентрация электронов
 e - их заряд
 $S \cdot v_d$ – объем, проходящий за $t=1$ с через сечение S

Пусть ток $I=1$ А течет через сечение $S=1$ мм², $n=10^{23}$ см⁻³ (медь).

$$v_d = \frac{1A \cdot 3 \cdot 10^9}{10^{23} \cdot 4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-2}} \sim 10^{-2} \text{ см/с}$$



$v = 10^7$ см/с
 (Оценка Друде)

Оценим τ и l :

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

В системе СИ:

σ для Cu($T=300$ К) = $6 \cdot 10^7$ (Ω м)⁻¹, $n \approx 10^{29}$ м⁻³

Получаем $\tau(T=300$ К) $\sim 3 \cdot 10^{-15}$ с.

Это время упругих столкновений

~~$\langle l \rangle = v \cdot \tau = 3 \cdot 10^{-8} = 3 \text{ \AA}$~~

На самом деле, как мы увидим, $v = 10^8$ см/с, $l = 30 \text{ \AA} \gg a_0!$

Диффузионный транспорт тепла (энергии). Теплопроводность в модели Друде

T_1



T_2

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

$$Q = n_e v \cdot [E_e(x) - E_e(x + v\tau)] = n_e v^2 \frac{dE_e}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right) \tau = -v^2 \tau \cdot C \frac{dT}{dx}$$

$$\kappa_e = \frac{1}{3} v^2 \tau \cdot C$$

после усреднения по углам

$$\frac{\kappa_e}{\sigma} = \frac{v^2 \tau \cdot C}{3(e^2 n \tau / m)}$$

не зависит от τ !
Видеман-Франц

$$\frac{\kappa}{\sigma} \sim T$$

Друде **неправильно** считал $C = 3n_e k_B$ (ошибка в 100 раз)
и $v = [(3k_B T)/2m]^{1/2}$ – **ошибка на порядок при $T_{\text{ком}}$**

Загадка: Милликен измерил e/m только в 1909.
Откуда Друде в 1903г. уже знал e ?

Диффузионный транспорт тепла (энергии). Теплопроводность в модели Друде

T_1



T_2

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

$$Q = n_e v \cdot [E_e(x) - E_e(x + v\tau)] = n_e v^2 \frac{dE_e}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right) \tau = -v^2 \tau \cdot C \frac{dT}{dx}$$

$$\kappa_e = \frac{1}{3} v^2 \tau \cdot C$$

после усреднения по углам

$$\frac{\kappa_e}{\sigma} = \frac{v^2 \tau \cdot C}{3(e^2 n \tau / m)}$$

не зависит от τ !
Видеман-Франц

$$\frac{\kappa}{\sigma} \sim T$$

Модель Друде настолько простая и наглядная, что многие думают, что она правильна. Как мы поняли, она неправильная. В частности $v \neq v(T)$, $v = \text{const}$, а $C \neq \text{const}$, $C \propto T$. Поэтому согласие с экспериментом - случайное

Квантовая теория Зоммерфельда и Бете (1933)

Электронны - волны.

Свободные электроны:

$$\Psi_0(x) = \cos(\omega t + kx) = \cos(t \cdot E/\hbar + kx)$$

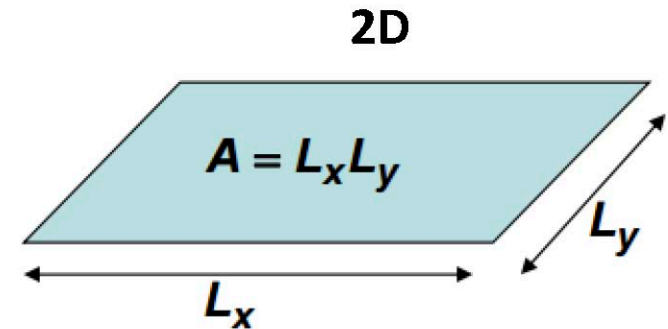
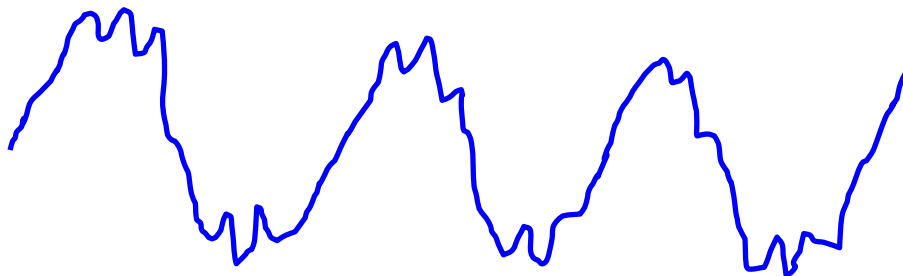
t -зависимость нас не интересует: $\Psi_0(x) = \cos(kx)$

Волновая функция электронов в металле похожа на $\Psi_0(x)$, но она слегка модулирована периодическим потенциалом решетки.

(Пока пренебрегаем этим)

$$\Psi_0^{2d}(r) = \sqrt{\frac{1}{A}} [\cos(k_x x) \cos(k_y y)]$$

$$\bar{k} = \bar{p} / \hbar$$



Классическая, квазиклассическая и квантовая физика

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad (\text{Эйнштейн})$$

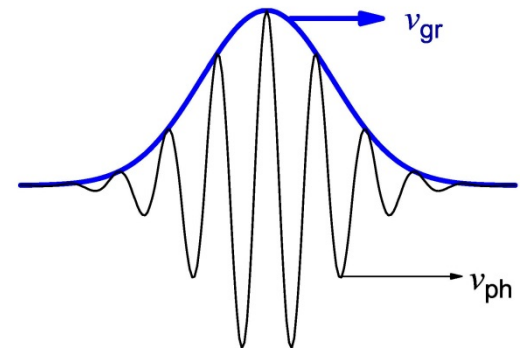
$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{де Бройль})$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m}$$

$$v_{\text{group}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} \equiv v_{\text{classic}},$$



Квантовая теория Зоммерфельда и Бете (1928-33)

Электроны - волны.

Свободные электроны:

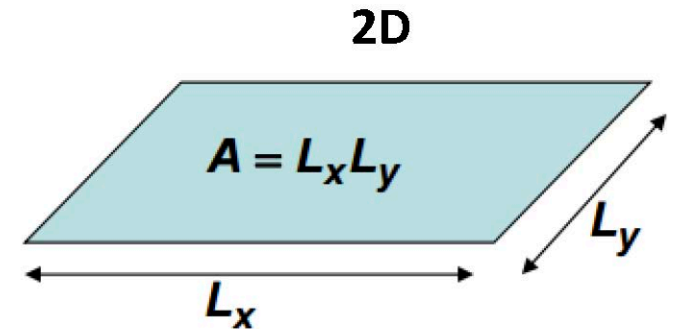
$$\Psi_0(x) = \cos(\omega t + kx) = \cos(t \cdot E/h + kx)$$

t-зависимость нас не интересует: $\Psi_0(x) = \cos(kx)$

Волновая функция электронов в металле похожа на $\Psi_0(x)$, но она слегка модулирована периодическим потенциалом решетки. (Зоммерфельд этого не знал).

Наложим периодические гран. условия

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, y, z) &= \Psi_0(x + L_x, y, z) = \\ &= \Psi_0(x, y + L_y, z) = \Psi_0(x, y, z + L_z) \end{aligned}$$

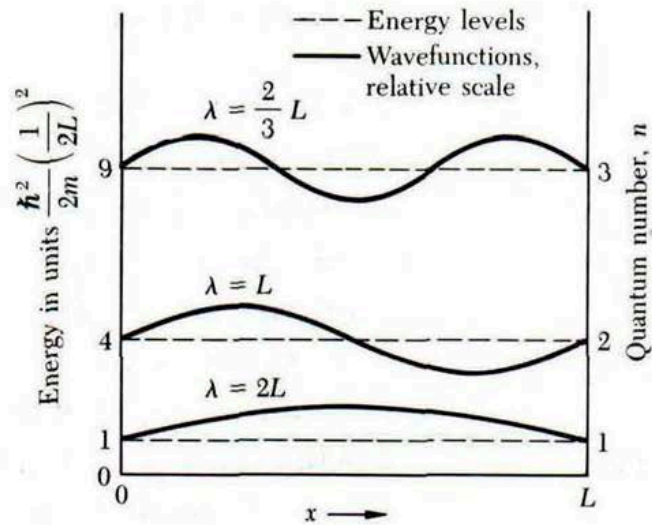


Отсюда - квантование импульса:

$$n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

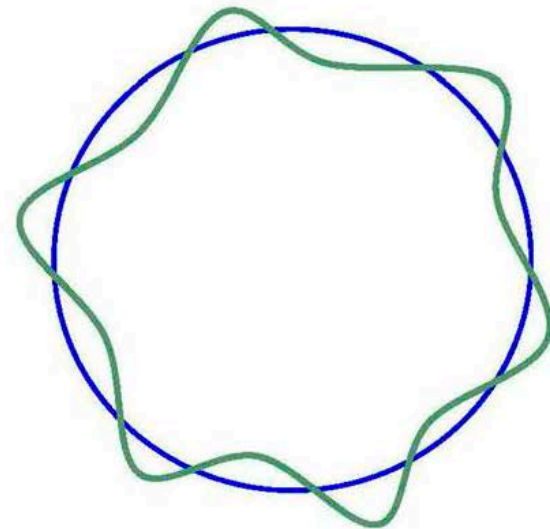
$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}, k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y} = \frac{2\pi n_z}{L_z}$$

Гран. условия “ящика”



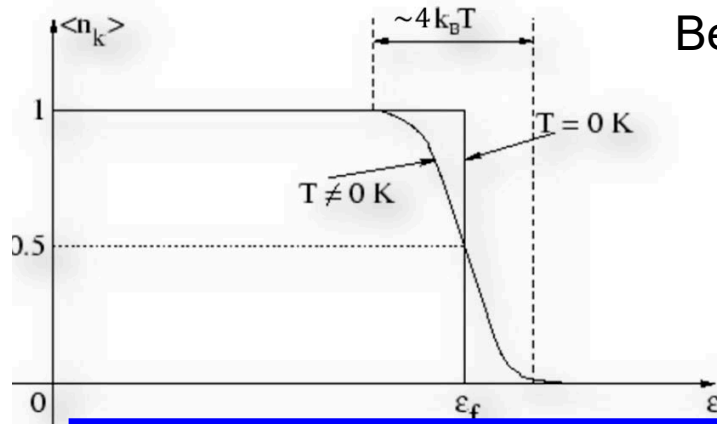
$$k = \pi / L, 2\pi / L, 3\pi / L \dots$$

Периодические гран. условия



$$k = \pm 2\pi / L, \pm 4\pi / L, \pm 6\pi / L \dots$$

Электронная теплоемкость



Вероятность заполнения состояний

$$f(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon - E_F}{k_B T}}}$$

$$\delta U \approx \delta N \cdot k_B T = g_{3D}(E_F)(k_B T)^2$$

$$C_{el} = \frac{\partial U}{\partial T} \approx 2g_{3D}(E_F) \cdot k_B^2 T$$

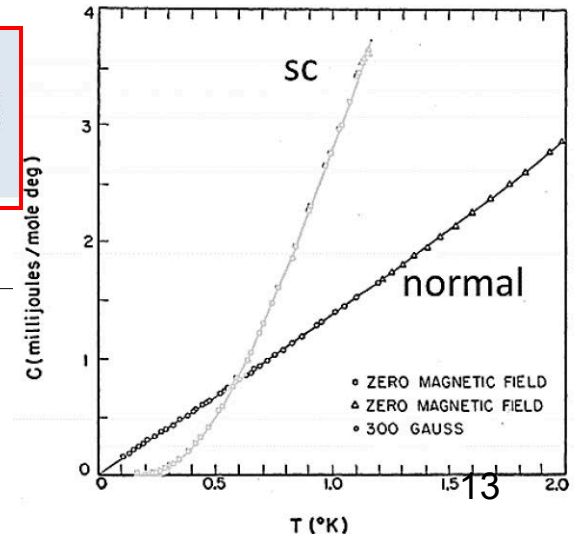
Гораздо меньше чем $3nk_B$!

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

$$E_F = \frac{(\hbar k_F)^2}{2m} = \frac{(\hbar)^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

$$g_{3D}(E_F) = \frac{3n}{2E_F}$$

$$C_{el} = \frac{3n}{E_F} k_B^2 T = 3nk_B \frac{k_B T}{E_F}$$

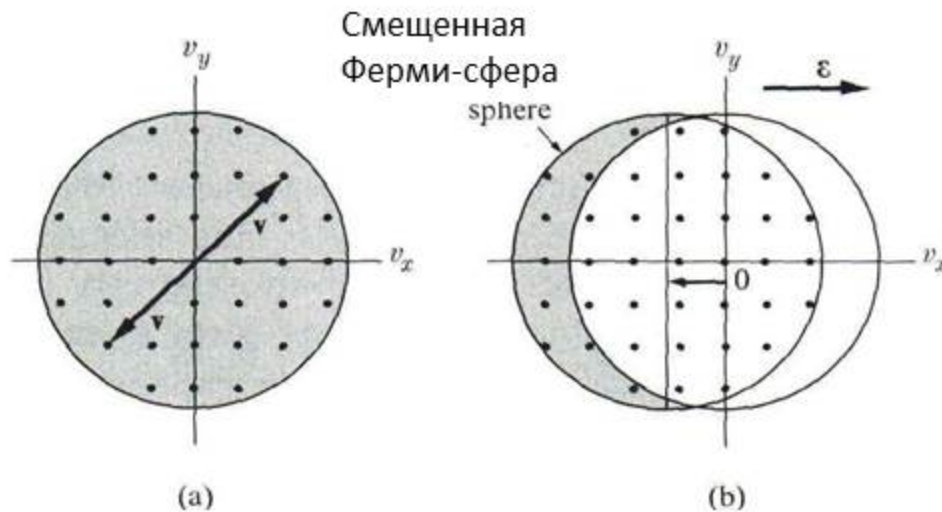


Квазиклассический подход

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k}(\tau) - \vec{k}(0) = -e\vec{E}\tau$$

- Центр сферы Ферми сдвигается на $\Delta k = -eE\tau$.
- При $\Delta k \ll k_F$, $v_d/v_F \sim (3/2)(\Delta k/k_F)$
- Поэтому число электронов, сдвигающихся из равновесного состояния $(\Delta k/k_F)N$ или $(v_d/v_F)N$



$$\vec{j} = (-e) \left(\frac{v_d}{v_F} n \right) \langle \vec{v}_F \rangle = -en\vec{v}_d$$

$$\vec{v}_d = \hbar \langle \vec{k}(\tau) \rangle / m = -(e\tau / m) \vec{E}$$

$$\therefore \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

- **Квазиклассика vs классика**

Результат похож, но микроскопическая картина другая!

- v_F VS v_d (отличие в 10^9 раз!)
- $(v_d/v_F) N_e$ VS N_e

Транспорт заряда в теории Зоммерфельда (Квазиклассика)

Рассмотрим, для определенности 2D систему.

Из периодичности решетки $n_e^{2d} = \frac{g_s}{(2\pi)^2} \pi k_F^2 = \frac{2}{4\pi} k_F^2$

$$l = v_F \tau = \frac{\hbar k_F}{m} \tau.$$

Подставим все это в ф-лу Друде: $\sigma_{2d} = \frac{e^2}{2\pi m} k_F^2 \tau = \frac{e^2 v_F \tau}{h} k_F = \frac{e^2}{h} k_F l = \frac{2e^2}{h} \frac{\pi l}{\lambda_F} \sim \frac{2e^2}{h} \frac{l}{d_{ee}}$

Константа Клитцинга

$$\frac{h}{e^2} = 25.8128... \Omega$$

Транспорт заряда в теории Зоммерфельда (Квазиклассика)

Зоммерфельд (квазиклассика, учел статистику Ферми-Дирака)

В его модели исправлены неточности модели Друде

Однако,

- не видно различие между транспортом в изоляторе и металле,
- не видно роли когерентности электронных волн,
- нет места для баллистического транспорта заряда,
- игнорируются взаимодействия между электронами
- Последнее исправлено в теории Ферми-жидкости Ландау

Константа Клитцинга

$$\frac{h}{e^2} = 25.8128... \Omega$$

Квантовый транспорт заряда

Поговорим немного о коэффициенте диффузии

Коэффициент диффузии зависит от размерности системы d

$$D_d = \frac{1}{d} v_F l = \frac{1}{d} v_F^2 \tau$$

В статфизике, коэффициент диффузии описывает как изменяется скорость индивидуального электрона до и после рассеяния. Более точно это дается коррелятором скорости (формула Кубо):

$$D = \int_0^\infty \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по всем возможным направлениям в пространстве скоростей (или импульсов), которые может иметь начальная скорость $v(0)$, а индекс x означает направление приложенного электрического поля E_x .

Вычислим коэффициент диффузии для одномерной системы $d = 1$. Предположим Друдевский механизм рассеяния, т.е. полную потерю памяти после каждого акта рассеяния. Тогда

$$D_{d=1} = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt = \int_0^{\tau} + \int_{\tau}^{\infty}$$

В первом интеграле для коротких времен $t < \tau$ скорости $v(t)$ и $v(0)$ коррелированы, т.е. произведение $v_x(t)v_x(0) \approx (v(0))^2$. Для 2го интеграла произведение будет случайным и обратится в ноль после усреднения. Для 1d-пространства есть только два направления скорости $+x$ и $-x$, поэтому $(v_x(0))^2 = v_F^2$ и из формулы Кубо получаем подтверждение нашего результата

$$D_{d=1} = v_F^2 \tau$$

Вспомним законы Фика для диффузии

1й закон:

$$J = -D \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

J - диффузионный поток (количество массы переносимой в единицу времени через единицу площади), ϕ - концентрация (напр, количество вещества в единице объема) x - положение в пространстве.

При $d = 2, 3$ надо записать $J = -D\nabla\phi$

Градиент концентрации – движущая сила для диффузии.

Запишем баланс массы: согласно ему а также согласно здравому смыслу изменение концентрации в данной точке должно быть равно разности потока втекающих и вытекающих частиц. Применим также 1й закон Фика и получим

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}J = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

Физиолог Adolf Fick установил эти законы экспериментально, в 1855г. измеряя диффузию в водных растворах соли):

Предположим, что D постоянен и не зависит от координаты, тогда получаем

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$$

2й закон Фика для случая $d = 2, 3$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\nabla^2\phi$$

Запишем 2й закон Фика в наших обозначениях для 2D системы электронов:

$$\frac{\partial n(\bar{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\bar{r}, t).$$

Решение этого уравнения в цилиндрических координатах:

$$n_{2d}(\bar{r}, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right). \quad \text{Зад.: проверить !}$$

Отсюда можно вычислить среднее расстояние, на которое ансамбль частиц уйдет за время t от начала координат:

$$l(t) \equiv \langle |\bar{r}(t)| \rangle \equiv \frac{\int |\bar{r}| n(\bar{r}, t) d\bar{r}}{\int n(\bar{r}, t) d\bar{r}} = \boxed{\sqrt{Dt}} \quad \text{Зад.: вывести !}$$

Этот результат означает, что в диффузионном режиме среднее смещение растет как корень из времени.

Отсюда автоматически следует, например, что длина сбоя фазы и время сбоя фазы в диффузионном режиме связаны соотношением

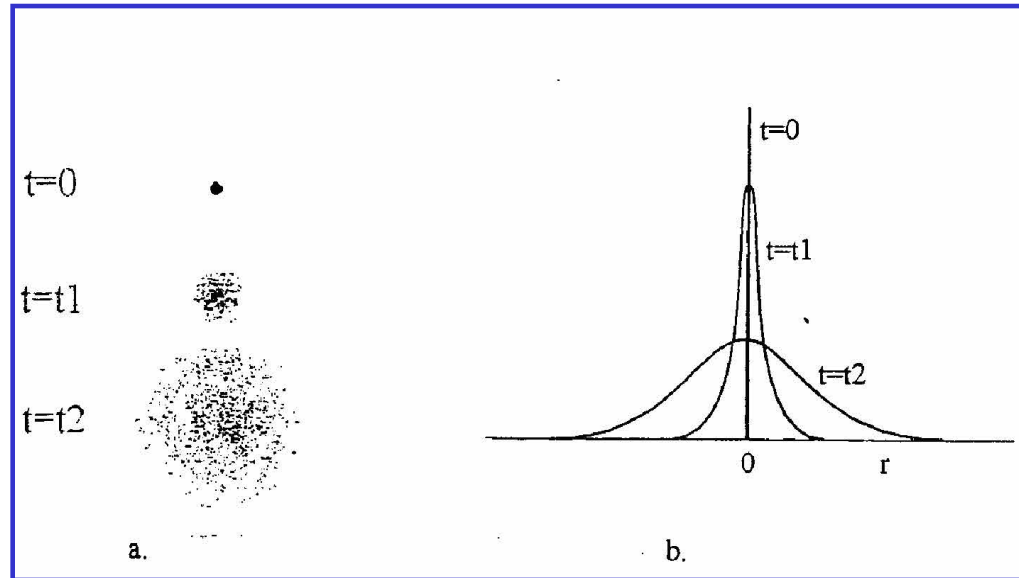
$$l_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$$

То же самое соотношение связывает неупругую длину l_i с неупругим τ_i .

Диффузионное движение классической частицы в пространстве в зависимости от времени.

(a) расширение области в реальном пространстве показывает как плотно упакованное распределение частиц в момент $t = 0$ в точке $r = 0$ расширяется со временем.

(b) Гауссова форма плотности вероятности $n(r, t)$ обнаружить частицу в точке r во время t .



NB

Вы не заметили, что мы как-то мимоходом, не обсуждая того, перешли от числа электронов (т.е. объема Ферми сферы) к плотности состояний на поверхности Ферми. Это соотношение есть теорема Латинжера. Для невзаимодействующей системы она тривиально получается из принципа Паули, но важно что она остается справедливой даже в случае взаимодействующей системы.

Квантовый диффузионный транспорт. Слабая локализация

Рассмотрим случай $\lambda_F, l_e \ll L, l_\varphi$ $l_e \equiv l$

Упругое и неупругое рассеяние

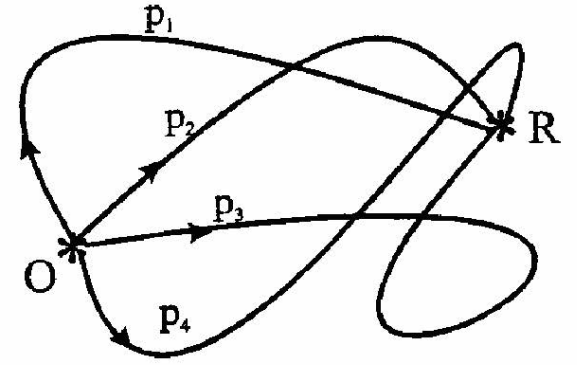
До сих пор мы предполагали, что каждый акт рассеяния полностью стирает информацию о предыдущей величине и направлении скорости электрона.

Это означает, что мы пренебрегли корреляцией фазы волновой функции. Если фаза хотя бы частично сохраняется при рассеянии, то это повлияет на проводимость связанную нами посредством Эйнштейновского соотношения с коэффициентом диффузии.

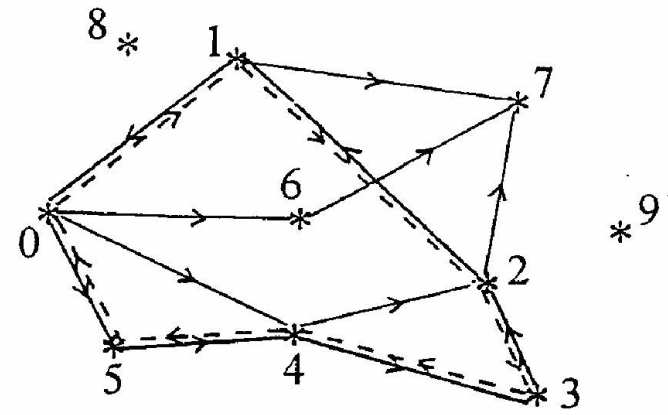
Действительно, сохранение фазы в процессе рассеяния вносит корреляцию между скоростями на временах, больших чем время упругого рассеяния τ_e .

Обозначим τ_φ - время фазовой когерентности, т.е. время на котором спадает корреляция

Электронные волны, распространяются в неупорядоченной среде с упругими рассеивателями. Ψ -функция одного электрона из точки O разлагается в ряд частных волн ψ_j , каждая из которых следует по вполне определенному пути p_j и приходит в конечную точку R с коэффициентом прохождения t_j .



Электронная волна исходит из точки O . Выделим два класса траекторий. В первом классе конечная точка выбрана случайно, например, 7. Амплитуда волны в точке 7 сложится из волн прошедших по путям $0-1 \rightarrow 7$, $0-4-2 \rightarrow 7$, $0-5-4-3-2 \rightarrow 7$ и т.д.



$$\Psi(7) = \sum_j \psi_j = \sum_j t_j \cos(\varphi_j)$$

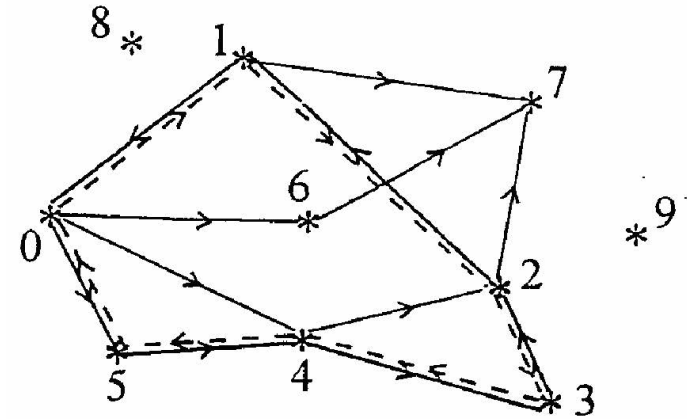
$$P(7) = |\Psi(7)|^2 = \sum_j t_j^2 + \sum_{j \neq k} t_j t_k \cos(\varphi_j - \varphi_k)$$

В пределе $j \rightarrow \infty$ мы получаем классический результат - сумма вероятностей распространения по всем путям.

$$P(7) = \sum_j t_j^2$$

А что будет, если начальная и конечная точки выбраны не случайно? Пусть начальная и конечная точки совпадают в точке О. Какова вероятность возвращения в ту же точку из которой вышел электрон?

Это например траектории 0-1-7-6-0 или 0-5-4-0. Если различные пути выбраны случайно, то набег фаз случайны и при усреднении мы ничего нового не получим.



Но есть пути, которые удовлетворяют соотношению инверсии времени. Это, например траектории 0-1-2-3-4-5-0 и 0-5-4-3-2-1-0.

Симметрия обращения времени означает, что фазы, набираемые на каждой траектории из такой пары равны друг другу. Обозначим (+) и (-) коэффициенты прохождения и набег фазы для путей распространения по часовой стрелке и против. Тогда вероятность возвращения в точку 0 по

$$P_j(0 \rightarrow 0) = t_{j+}^2 + t_{j-}^2 + t_{j+}t_{j-} \cos(\varphi_j - \varphi_j) + t_{j-}t_{j+} \cos(\varphi_j - \varphi_j) = 4t_j^2,$$

поскольку $t_{j+} = t_{j-}$ и набег фаз равны. Суммируя по всем парам путей взаимно-обращенных по времени, получаем вероятность возврата в исходную точку

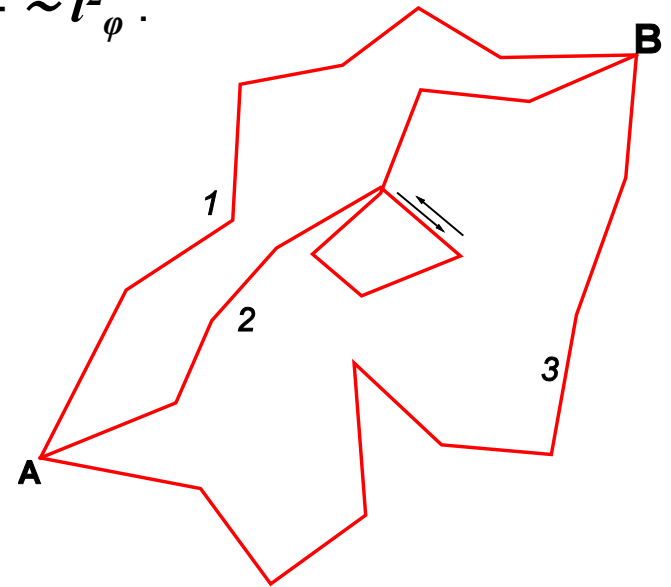
$$P(0 \rightarrow 0) = \sum_j P_j(0 \rightarrow 0) = 4 \sum_j t_j^2,$$

Двойка возникла из-за того, что одну и ту же траекторию мы посчитали дважды. Второй коэффициент 2 означает симметрию двух путей взаимно-обращенных по t .

Осмыслим результат: фазокогерентное сложение взаимно-обращенных по времени траекторий приводит к увеличению вероятности вернуться назад. Это часто называют “когерентное рассеяние назад”. Этот результат является основой слабой локализации (WL).

В реальной ситуации, траектории распространения электронных волн могут содержать петли самопересечения. Минимально возможная площадь таких петель $\sim l^2$, а максимально возможная площадь - $\sim l^2_\phi$.

Этот диапазон площадей будет определять диапазон магнитных полей, которые (вследствие нарушения симметрии обращения времени) подавляют слабую локализацию и восстанавливают Друдевское классическое значение проводимости.



$$\sigma_{AB} = \sum P_i \quad \text{- classical}$$

$$\sigma_{AB} = |\sum \Psi_i|^2 = \sum |\Psi_i|^2 + 2\Psi_i\Psi_j \quad \text{- quantum}$$

skip

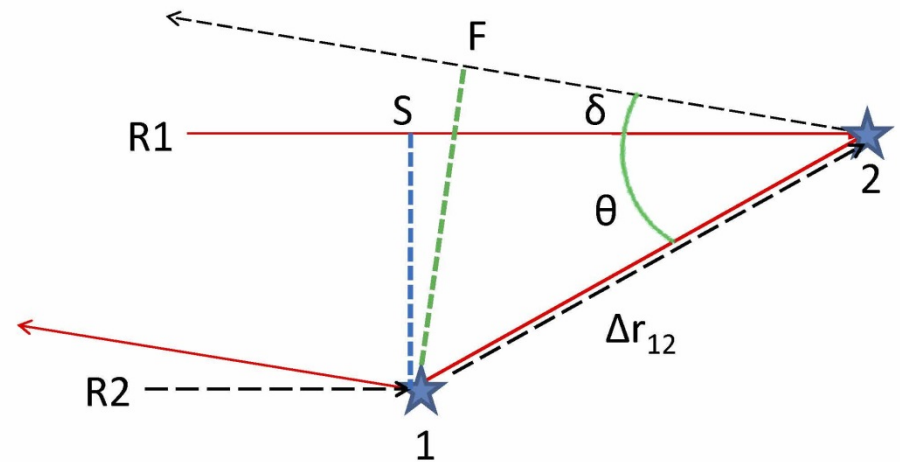
ДЗ: найти диапазон углов, в котором происходит когерентное рассеяние назад

14.1.2 В каком направлении происходит когерентное рассеяние

Выберем некоторый угол δ по отношению к направлению падающей волны и будем следить за всеми лучами отражающимися под углом δ . На рис. изображены два упругих рассеивателя (1 и 2) и плоская электронная волна, набегающая на них с левой стороны. Применим представления геометрической оптики.

На линии S – 1 волна имеет плоский фронт (изображенный штриховой линией). Волна частично рассеивается непосредственно на каждом встреченном ей рассеивателе и возвращается назад. Кроме того, волна частично проходит и рассеивается на втором рассеивателе, отстоящем на расстоянии $\Delta r_{1,2}$ от первого и также поворачивает налево. Для того, чтобы найти полную волну, отраженную налево, надо просуммировать все отраженные волны с учетом их фаз.

Параллельные лучи $R1$ и $R2$ набегающего пучка с плоским фронтом. Чтобы учесть эффекты интерференции выберем некоторый угол δ по отношению к направлению падающей волны будем следить за всеми лучами отражающимися под углом δ . Луч $R1$ отражается в точке 2 и идет в точку 1, от которой отражается налево под углом δ .



Луч $R2$ отражается от 1, попадает на 2 (т.е. идет противоположным путем лучу $R1$) и как мы предполагаем, отражается от 2 под углом δ .

Начальная точка S для луча $R1$ и точка 1 для луча $R2$ находятся на линии одного волнового фронта. Как видно, первый луч проходит путь $S \rightarrow 2 \rightarrow 1$, а второй луч проходит путь

$1 \rightarrow 2 \rightarrow F$. После этого, оба луча выходят под одним и тем же углом δ .

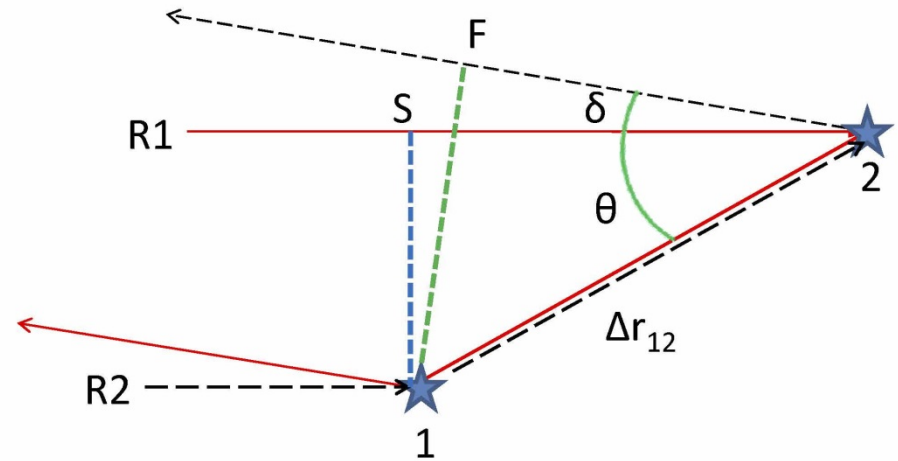
Разность длин путей $\Delta l_{1,2}$, $\Delta l_{1,2}(\delta) = \Delta r_{1,2}[\cos \theta - \cos(\theta + \delta)]$ исходящих из точек 2 и 1.

Уравняя по углам δ после несложной но длинной тригонометрии получим

$$\langle \varphi_{1,2} \rangle \sim \frac{l_e}{\lambda_F} \langle \delta^2 \rangle,$$

где l_e - расстояние между рассеивателями. Волны двух лучей будут складываться конструктивно, если их фазы отличаются меньше чем $\pi/2$, т.е. $\langle \varphi \rangle < \pi/2$. Отсюда получаем условие на максимальный угол δ :

В диффузионном случае по определению $\lambda_F \ll l_e$, поэтому $\delta \ll 1$



$$\delta^2 \frac{l_e}{\lambda_F} < \pi/2$$

$$\delta < \sqrt{\frac{\lambda_F}{l_e}}$$

Влияние слабой локализации на проводимость

Для простоты, рассмотрим 2d систему. Для этого мы начнем с Эйнштейновского выражения для диффузии. Вспомним диффузионное уравнение и его решение - распределение плотности частиц в момент времени t :

$$n_{2d}(\vec{r}, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp(-r^2/4Dt) \sim \frac{n_0}{4\pi Dt}$$

Смысл его - это вероятность нахождения частиц в точке r в момент $t \gg \tau$.

Среднее расстояние на которое ансамбль частиц уйдет за время t от начала координат есть $l(t) = (Dt)^{1/2}$.

Отсюда объем, внутри которого может находиться электрон в момент времени t (из-за расплывания функции распределения) порядка $l^2 \sim (Dt)^{d/2} = Dt$.

Некоторые из электронов, в результате когерентного отражения назад, могут вернуться в начало координат. Объем, из которого электрон за время dt может попасть в начало координат, порядка $\lambda_F v_F dt$.

Отношение этих двух объемов определяет относительное число электронов, которые побывали в начале координат за время dt за счет когерентного рассеяния назад, причем минимальное время, за которое электрон может вернуться назад - это τ , а максимальное время - это время сбоя фазы τ_φ . В результате

$$\frac{\delta\sigma_{2d}}{\sigma} \sim - \int_{\tau}^{\tau_\varphi} \frac{v_F \lambda_F}{Dt} dt = \frac{v_F \lambda_F}{D} \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau} \right) = - \frac{4\pi}{k_F l} \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau} \right)$$

поскольку $D_{2d} = v_F^2 \tau / 2$. Абсолютное значение поправки к проводимости

$$\Delta\sigma_{2d} \sim - \frac{2e^2}{h} \frac{\pi l}{\lambda_F k_{Fl}} \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau} \right) = - \frac{2e^2}{h} \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau} \right)$$

Квантовая проводимость меньше чем классическая!

Если 2d система является пленкой толщины $b \ll l_\varphi$, то

$$\frac{\delta\sigma_{2d}}{\sigma} \approx - \frac{1}{k_{Fl}} \frac{1}{k_{Fb}} \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau} \right)$$

Для 1d системы (проволока диаметром $b \ll l_\varphi$)

$$\frac{\delta\sigma_{1d}}{\sigma} \approx - \left(\frac{1}{k_F b} \right)^2 \left(\frac{l_\varphi}{l} - 1 \right)$$

Все эти поправки отрицательные, они уменьшают проводимость. Видно, что слабая локализация дает максимальный эффект в 1d системе. При понижении температуры l_φ растет как $1/T$ и поправки расходятся.

Q: Станет ли проводимость отрицательной в пределе $T \rightarrow 0$?

Q: Может ли проводимость быть ненулевой у двумерной системы при $T=0$? (существует ли двумерный металл ?)

Для 1d системы (проволока диаметром $b \ll l_\varphi$)

$$\frac{\delta\sigma_{1d}}{\sigma} \approx - \left(\frac{1}{k_F b} \right)^2 \left(\frac{l_\varphi}{l} - 1 \right)$$

Все эти поправки отрицательные, они уменьшают проводимость. Видно, что слабая локализация дает максимальный эффект в 1d системе. При понижении температуры l_φ растет как $1/T$ и поправки расходятся.

А: Проводимость отрицательной не станет, поскольку наше диффузионное рассмотрение справедливо лишь для $l \gg \lambda_F$. Когда из-за роста l_φ при понижении температуры будет достигнут этот предел по длине пробега, то система перейдет в локализованное состояние, в котором проводимость при конечной температуре определяется другими физическими процессами – термоактивацией и туннелированием, а не диффузией.

Для 3d системы эффект слабой локализации минимален

$$\frac{\delta\sigma_{3d}}{\sigma} \approx - \frac{1}{k_F^2 l} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_\varphi} \right)$$

Вывод WL поправки к проводимости через поправку к коэффициенту диффузии

Когерентное отражение назад уменьшает коэффициент диффузии на величину ΔD . Воспользуемся формулой Кубо для корреляций скорость-скорость:

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt.$$

Мы хотим вычислить поправку к D из-за корреляции в рассеянии назад в малом интервале углов. Отрицательную добавку в коэффициент диффузии можно записать как

$$\Delta D \approx -\langle v_F v_F \cos(\delta_{\max}) P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle = \\ -\langle v_F^2 \delta_{\max}^2 P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle.$$

Здесь $|v_x(t)| \sim |v_x(0)| \sim v_F$, $\Delta S(r = 0)$ - некоторая площадь вокруг точки $r = 0$ и усреднение $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по всем направлениям падающего луча. Усреднение по всем углам дает обратную размерность пространства $1/d$ - вспомним формулу для коэффициента классической диффузии $D = (1/d)v_F^2 \tau$.

Вывод WL поправки к проводимости через поправку к коэффициенту диффузии

Когерентное отражение назад уменьшает коэффициент диффузии на величину ΔD . Воспользуемся формулой Кубо для корреляций скорость-скорость:

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt.$$

Мы хотим вычислить поправку к D из-за корреляции в рассеянии назад в малом интервале углов. Отрицательную добавку в коэффициент диффузии можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta D \approx & -\langle v_F v_F \cos(\delta_{\max}) P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle = \\ & -\langle v_F^2 \delta_{\max}^2 P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle. \end{aligned}$$

Максимальный угол предполагается малым (рассеяние назад, поэтому возникает δ_{\max}^2). Кроме того, мы записали вероятность возвращения “назад в исходную точку”

$x = 0$ как $P_{\text{return}} \Delta S(r = 0)$, поскольку это и есть вычисляемая добавка из-за возвращения назад.

Теперь надо договориться, что мы будем называть возвращением назад. Разумно это определить как классическая вероятность $P_{\text{return}}(\Delta S(r = 0))$ для частицы, стартовавшей в точке $r = 0$ вернуться в пределы некоторой площади ΔS вокруг точки $r = 0$, причем вернуться в пределах некоторого характерного времени. Точка исхода, конечно, выбрана произвольно. Вероятность вернуться назад за все времена равна

$$P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) = \Delta S C_{\text{return}} = \Delta S \int_0^{\infty} C(0, t) dt = \Delta S \frac{1}{n_0} \int_0^{\infty} n(0, t) dt,$$

где $n(0, t)$ - расплывающееся во времени распределение частиц, описывающее вероятность вернуться назад в точку начала в момент времени t . Мы уже это вычисляли для 2D системы:

$$n_{2d}(r, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \sim \frac{n_0}{4\pi Dt}$$

Теперь надо из физики проблемы обрезать времена. Ясно, что нельзя вернуться назад в результате интерференции за время меньше τ_e . Можно было бы резко обрезать нижний предел интегрирования, но из-за статистической природы диффузии лучше это сделать добавив множитель $(1 - \exp(-t/\tau_e))$ в коэффициент C_{return} . Надо также обрезать времена, большие чем τ_φ множителем $\exp(-t/\tau_\varphi)$.

Для простоты мы все же нагло обрежем пределы интегрирования вместо культурного сглаживания на краях. Оценим ΔS -площадь для возврата. Ясно, что у нас есть один параметр длины l_e , поэтому $\Delta S \sim l_e^2$. Подставив эти все куски в предыдущие формулы получим

$$\Delta D_{2d} \approx - \frac{\overbrace{l_e^2 v_F^2}^{\lambda_F / l_e} \underbrace{\delta_{max}^2}_{(1/2) v_F^2 \tau}}{8\pi D} \int_{\tau_e}^{\tau_\varphi} \frac{1}{t} dt \propto \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau_e} \right)$$

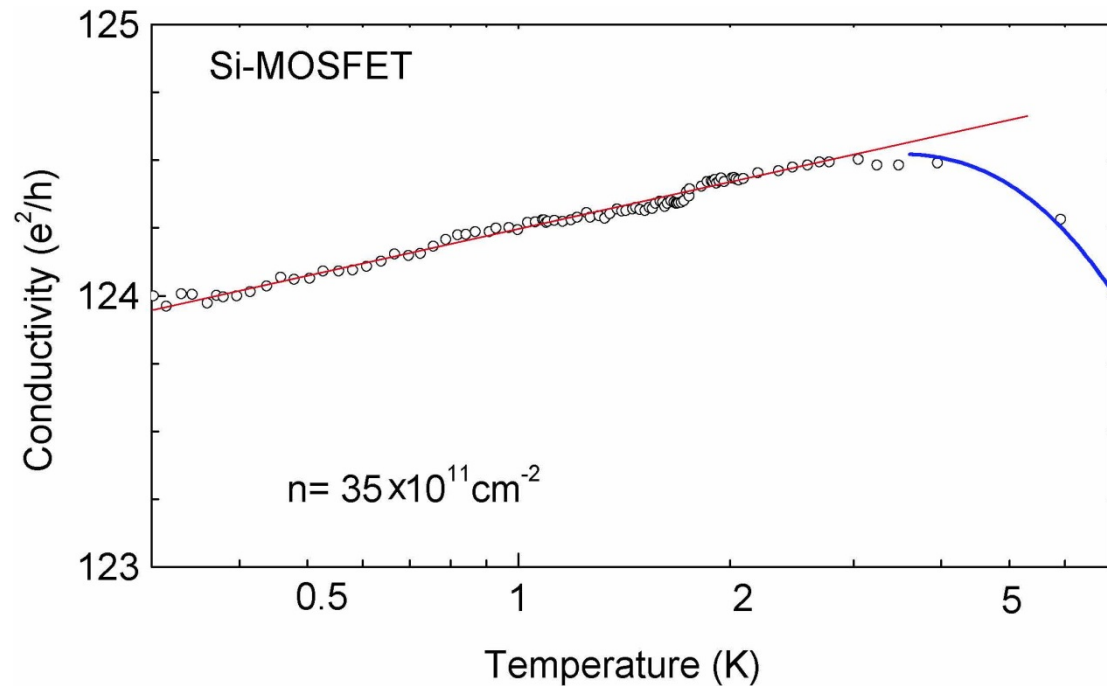
Окончательное выражение для WL поправки к проводимости

$$\Delta \sigma_{2d} = - \frac{e^2}{2\pi \hbar} \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau_e} \right)$$

Если электронная система имеет g_v долин, вклады от разных долин конструктивно складываются (если на временах τ_φ не происходит междолинное рассеяние) и амплитуда WL должна быть в g_v раз больше.

Проводимость для структуры Si-МДП в диапазоне температур (0.3 – 7)К.

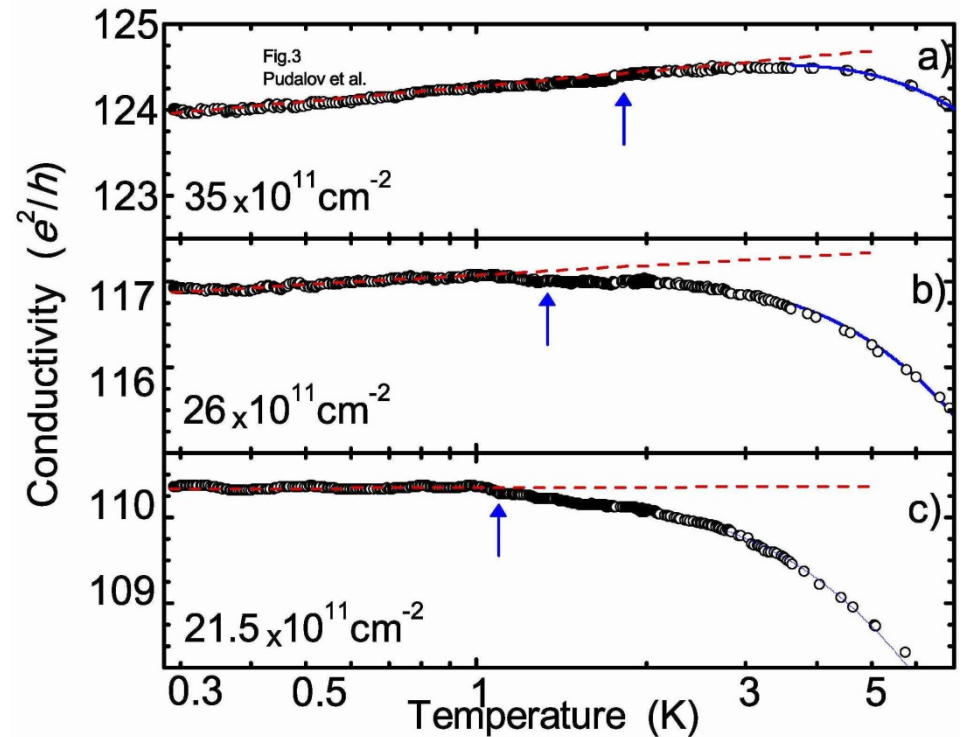
V.M. Pudalov, G. Brunthaler, A. Prinz, and G.Bauer, Phys. Rev. B 60 2154 (1999).



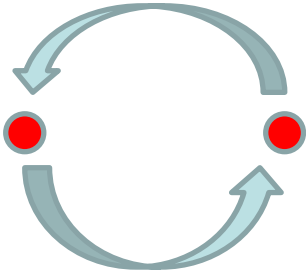
Видно, что T- зависимость проводимости логарифмическая и имеет правильный порядок $\sim e^2/h$. Проводимость должна изменяться на $4.6e^2/h$ при изменении температуры в 10 раз. В эксперименте, однако проводимость изменяется почти на порядок слабее, всего на $0.5e^2/h$ при изменении температуры от 0.3 до 3К.

Чтобы убедиться в правильности нашей интерпретации, рассмотрим эволюцию $\delta\sigma(T)$ при изменении и концентрации.

При уменьшении n наклон $\ln(T)$ зависимости резко уменьшается. Это доказывает присутствие еще одного механизма, который дает поправку другого знака.



Влияние перпендикулярного магнитного поля



1. В отсутствии магнитного поля:

Дважды перестановка местами электронов ничего не изменяет.

$$\Psi(r, \sigma) = \varphi(\sigma) \psi(r) = \text{Const.}$$

Одна перестановка фермионов изменяет знак $\Psi(r, \sigma)$.

При этом не меняется знак спиновой части $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)$.

Поэтому для фермионов перестановка изменяет знак их координатной волновой функции $\psi(r_1) = -\psi(r_2)$

т.е. добавляет множитель $\exp(i\pi)$.

2. Магнитное поле нарушает симметрию обращения времени.

В магнитном поле обход электрона по круговой орбите добавляет фазу.

Эффект Ааронова-Бома

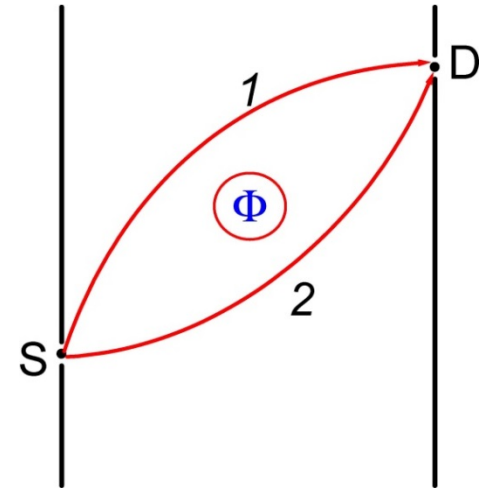
2D система в магнитном поле B_{\perp} : эффект Ааронова-Бома (Aharonov-Bohm)

Для волны распространяющейся по пути i

$$\psi_i(r) = \exp[-i\theta_i(r)]\psi_i^0(r)$$

$\psi_i^0(r)$ – волн. функция в отсутствие \mathbf{A}

$$\theta_i(r) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_S^D A dr_i \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$



$$|\psi_1(D) + \psi_2(D)|^2 = |\psi_1(D)|^2 + |\psi_2(D)|^2 + 2 \operatorname{Re} \psi_1^*(D) \psi_2(D) \approx 2 |\psi_1^0(D)|^2 [1 + \cos[\xi_E(D) + \theta_1 - \theta_2]]$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left[\int_S^D A dr_1 - \int_S^D A dr_2 \right] = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \operatorname{rot} A(s) ds = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Электроны распространяются в области, в которой магнитное поле равно нулю, однако на них действует вектор потенциал поля.

Другой вывод выражения для эффекта АВ

$$p = \hbar k = m\mathbf{v} + (e/c)\mathbf{A}$$

Изменение импульсы \rightarrow изменение фазы, даже если $H=0$

Полное изменение фазы

$$\Delta\phi = \int \mathbf{k} d\mathbf{l} = \frac{1}{\hbar} \int \left(m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = \Delta\phi_v + \Delta\phi_A$$

Фазовый сдвиг, индуцируемый вектор-потенциалом

$$\Delta\phi_A = \frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{A} d\mathbf{l}$$

$$\Delta\phi_A = \frac{e}{\hbar c} \int \bar{\mathbf{A}} d\bar{\mathbf{l}} = \frac{e}{\hbar c} \oint (\text{rot } \bar{\mathbf{A}} d\bar{\mathbf{S}}) = \frac{e}{\hbar c} BS = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Влияние перпендикулярного магнитного поля

В магнитном поле возникает разность фаз для сопряженных волн, распространяющихся вдоль замкнутой петлевой траектории по и против часовой стрелки. Для сопряженных волн $d\mathbf{r} = -d\mathbf{r}$ и кинетический импульс $\mathbf{p} = -\mathbf{p}$.

Поскольку $k = (1/\hbar)p = (1/\hbar)[mv - (e/c)A]$, находим

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 &= \frac{1}{\hbar} \oint d\bar{r}_1 \left(\bar{p}_1 + \frac{e}{c}\bar{A} \right) - \frac{1}{\hbar} \oint d\bar{r}_2 \left(\bar{p}_2 + \frac{e}{c}\bar{A} \right) \\ &= \frac{2e}{\hbar c} \oint \bar{A} d\bar{r}_1 = \frac{4\pi\Phi}{\Phi_0} \end{aligned}$$

Интерференционная компонента от каждой траектории осциллирует с магнитным полем. Однако, магнитные потоки, которые пронизывают контуры, различны, так что интерференция случайна. В результате общий интерференционный вклад в проводимость будет уменьшаться с полем начиная с поля $B l_\varphi^2 \approx \Phi_0$ и заканчивая полем $B_{tr} l^2 = \Phi_0$

$$B_\varphi = \frac{\hbar c}{eD\tau_\varphi}$$

Более подробные вычисления приводят к следующему выражению, известному как формула Хиками-Ларкина-Нагаоки:

$$\Delta\sigma_{xx} = -\frac{\alpha g_{\nu} e^2}{2\pi^2 \hbar} \left[\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\tau} \right) - \Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\tau_{\varphi}} \right) \right]$$

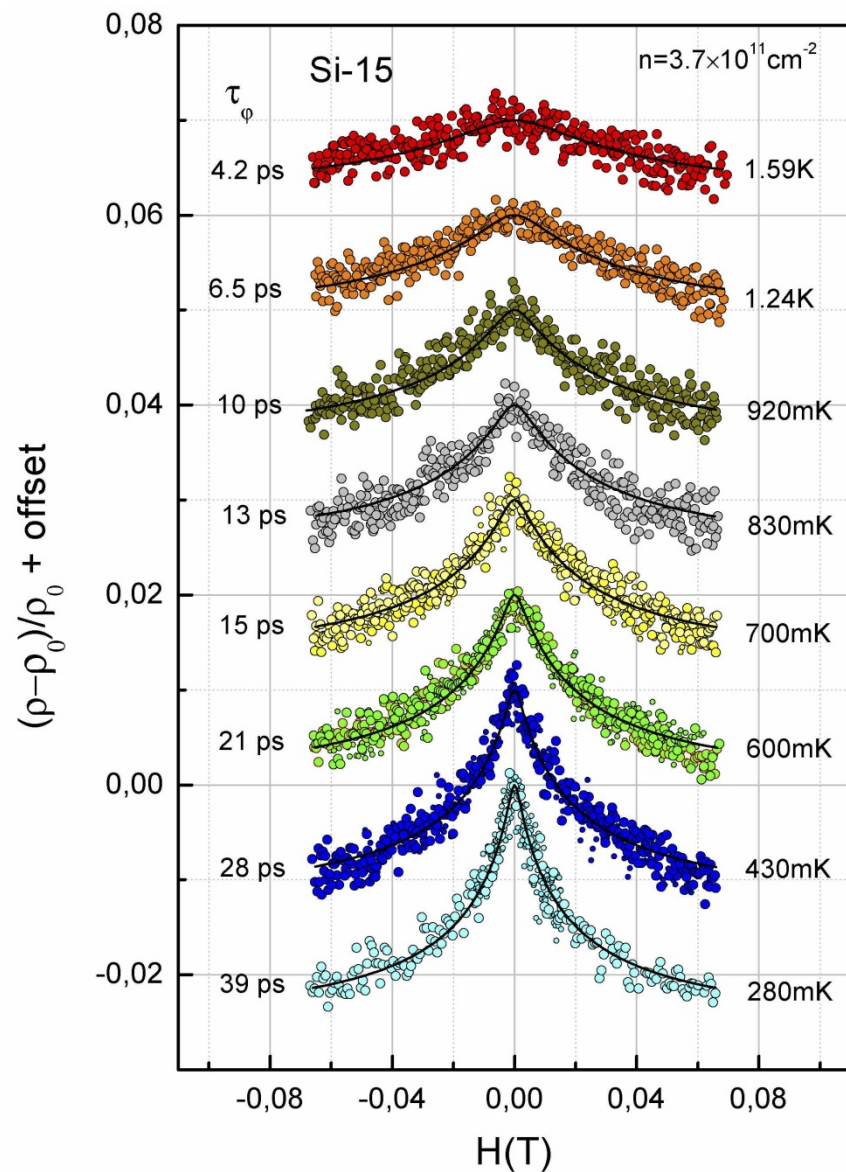
где Ψ - Дигамма функция от приложенного магнитного поля B , $a = \hbar/4eBD$ и D коэффициент диффузии. В этой формуле имеются два характерные значения поля –

- (1) B_{φ} и
- (2) “транспортное поле” $B_{tr} = \hbar c/(4eDt)$.

Первое значение поля определяет диапазон почти квадратичного изменения сопротивления – макушку кривой слабой локализации.

Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой NLN позволяет определить T_ϕ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения $\rho(B_\perp)$ в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение T , хотя, на практике, это оказывается не просто.

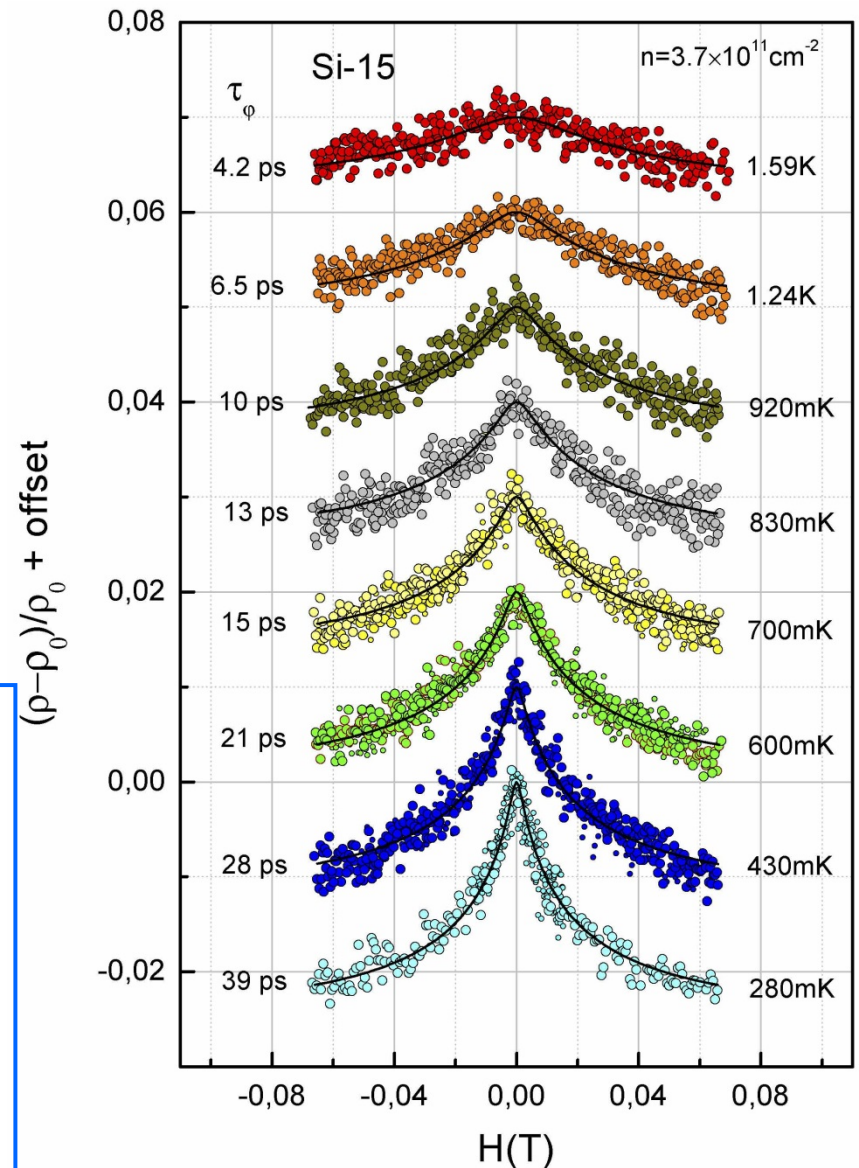
Q: Как определить в эксперименте значения D и τ ?



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 87, 096802 (2001)

Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить τ_ϕ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения $\rho(B_\perp)$ в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение τ , хотя, на практике, это не просто.

A: Из измерений эффекта Холла в слабом поле определяем концентрацию электронов n , из нее k_F и v_F , откуда $D = (1/d)v_F^2\tau$. τ находим из T - зависимости сопротивления при низких температурах, в отсутствии фононов и в условиях вырожденной системы $T \ll T_F$.



G.Brunthaler, A.Prinz, G.Bauer, V.M. Pudalov, Phys.Rev.Lett. 87, 096802 (2001)

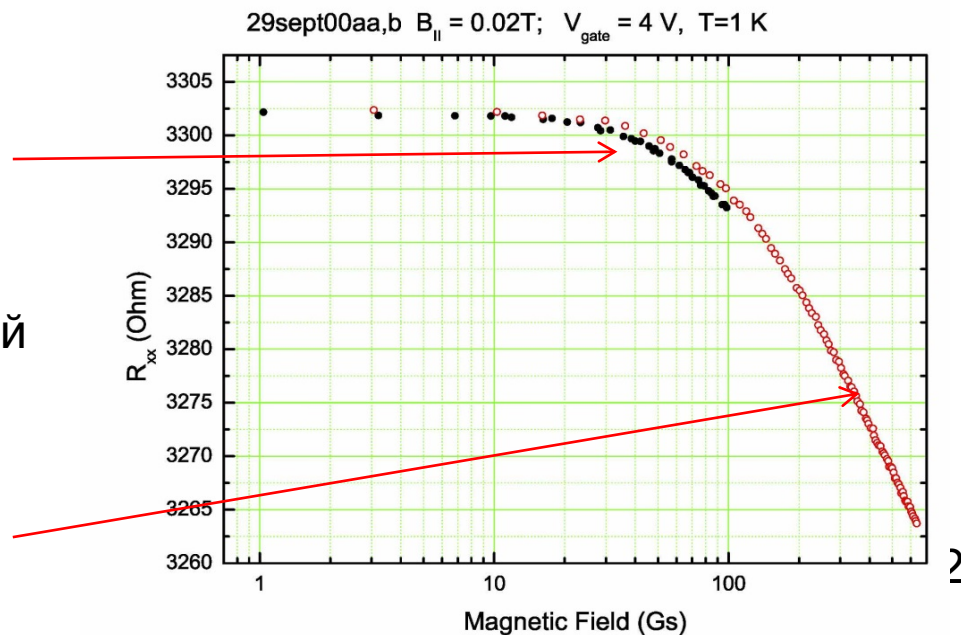
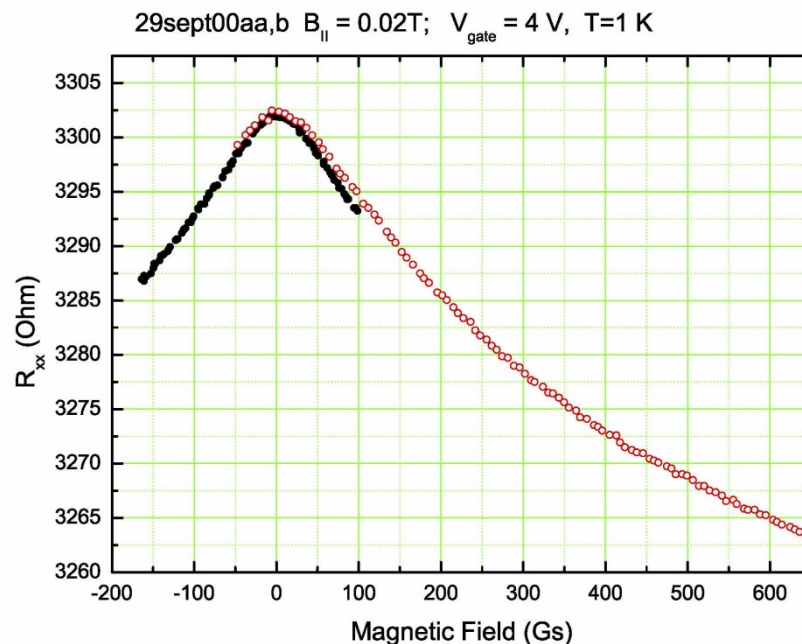
Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить T_ϕ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения $\rho(B_\perp)$ в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение T , хотя, на практике, это оказывается не просто.

Два характерных поля

(1) B_ϕ Это значение поля определяет диапазон почти квадратичного изменения сопротивления – макушку кривой слабой локализации.

и

(2) “транспортное поле” $B_{tr} = \hbar c / (4eDt)$.



Зависимость τ_φ от проводимости и от температуры вычисляется в микроскопической теории. Есть два механизма рассеяния:

(1) e-ph - доминирует при высоких T и дает $\tau_\varphi \propto 1/T^2$

(2) e-e рассеяние в пределе малого переносимого импульса (низкие T) дает зависимость $\tau_\varphi \propto 1/T$

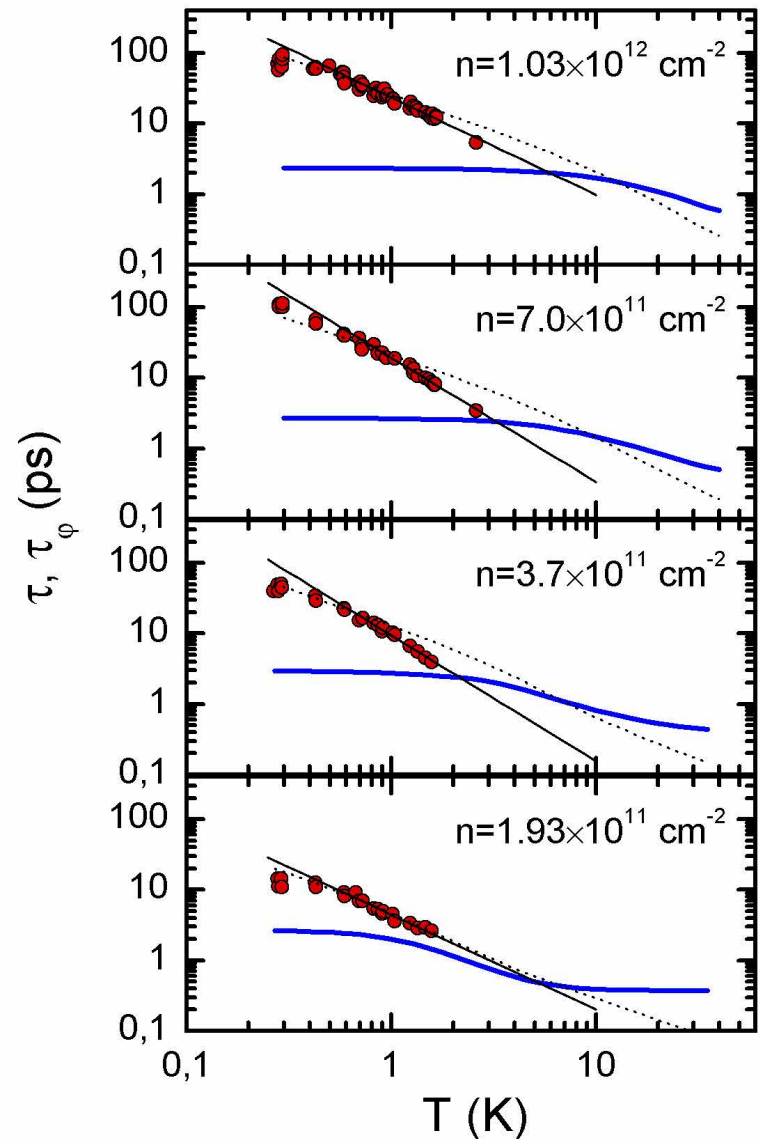
$$\tau_\varphi = \frac{\hbar g}{2\pi k_B T \ln(g/2)},$$

где g - безразмерная проводимость в единицах e^2/h . Проблема, вроде бы, возникает при малых значениях g , поскольку $\ln(g/2)$ стремится к нулю когда $g/2$ приближается к 1. На самом деле, это теоретическое описание справедливо только для $g \gg 1$.

Когда g становится порядка 1, отношение $g/\ln(g/2)$ следует заменить членом порядка единицы.

Измеренная и вычисленная
зависимость $\tau_\phi(T)$.
Пунктирная линия представляет
теоретически ожидаемое поведение
 $\tau_\phi \propto T^{-p}$

На Рисунке поведение $g/\ln(g/2)$ в
диапазоне $10 \leq g \leq 100$ фитировано
полиномом второго порядка и получена
зависимость $f(g) = 3.78 + 0.253g -$
 $0.00036g^2$ для аппроксимации g к
малым значениям.



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer,
V.M. Pudalov, PRL 87, 096802
(2001)

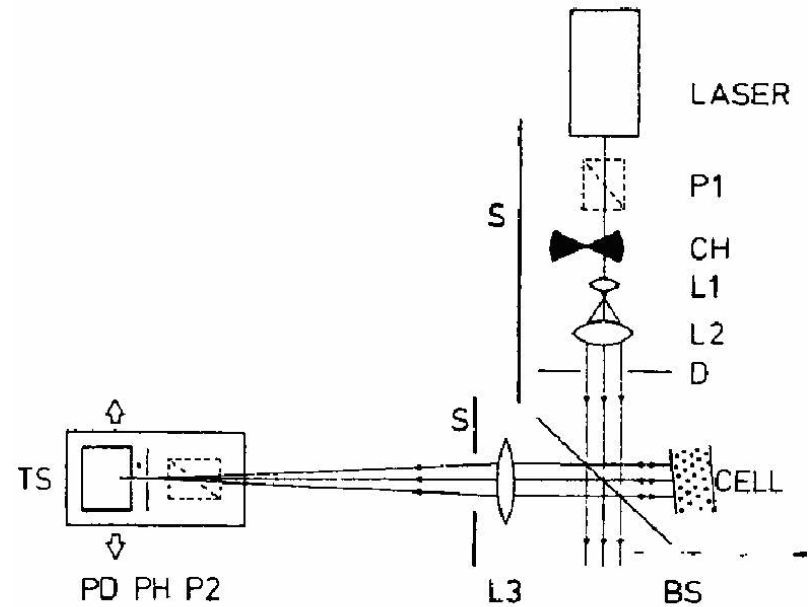
14.1.5 Когерентное рассеяние света

Ясно, что когерентное рассеяние назад могут претерпевать любые волны в диффузной среде - акустические, оптические и т.д. В отличие от электронных волн, однако, нет такого замечательного инструмента как магнитное поле и эффект Ааронова-Бома для влияния на WL. Остается единственный признак когерентного рассеяния - узкий конус углов рассеяния назад

$$\delta_{cone} = 2\delta_{max} \sim \sqrt{\lambda_F/l_e}$$

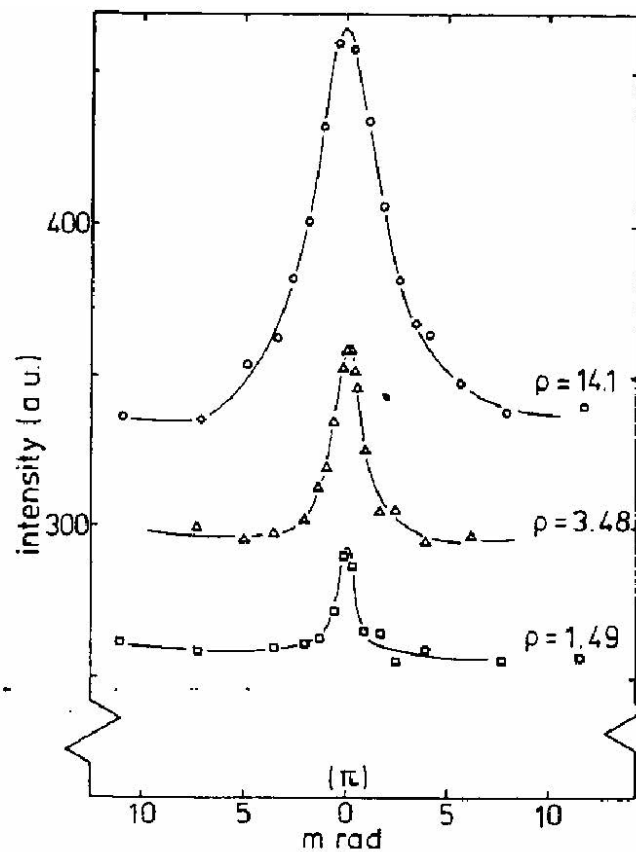
- Так было для электронов, а для фотонов
- $(\lambda/l)^{1/2}$

излучение He-Ne лазера посылается через расщепитель луча (50%) на мутную среду из полистириновых или латексных шариков $\sim 1\mu\text{м}$ диаметром. Отраженный луч регистрируется фотодетектором. Положение фотодетектора можно изменять в пространстве, и измерить зависимость отраженного света от угла.



Alkbeda et al. PRL 55, 2692 (1985)

Результаты измерений положения фотодетектора



Когерентное рассеяние света назад в разупорядоченной среде - водной эмульсии из 1мкм глобул латекса.

“Take-home message”

- В диффузионном режиме транспорта, в отсутствии магнитного поля проводимость σ уменьшается из-за эффектов интерференции
- Это уменьшение (слабая локализация) всегда имеет префактор e^2/h
- Вклад слабой локализации всегда имеет отрицательный знак и увеличивается по амплитуде по мере снижения температуры.
- В 1D- системах вклад слабой локализации приводит к быстрому уменьшению $\sigma \propto -1/T$.
- В 2D- системах вклад слабой локализации приводит к быстрому уменьшению $\sigma \propto -\ln(T)$ и конкурирует с вкладами от многочастичных эффектов.
- Эффекты слабой локализации несущественны для 3D- систем.

**Центр сверхпроводимости и
квантовых материалов им.
В.Л.Гинзбурга
ФИАН**