

Глава 18

Введение в теорию ферми-жидкости. Часть 4

Оглавление

18 Введение в теорию ферми-жидкости. Часть 4	1
18.1 Нулевой звук:История. Take-home-message . . .	4
18.1.1 Столкновения. Сравнение нулевого звука с первым	7
18.1.2 Параметры ^3He . Take-home message . . .	11
18.1.3 Экспериментальные данные о нулевом зву- ке	12
18.2 Столкновения квазичастиц	14
18.2.1 Структура интеграла столкновений . . .	14
18.2.2 Время жизни квазичастиц Ландау	15
18.2.3 Задачи	18
18.3 Заряженные ферми-жидкости	19
18.3.1 Экранирование и плазменные колебания: Введение	19
18.3.2 Плазменные колебания: Введение	27
18.4 Диэлектрическая реакция на электрическое поле	29
18.4.1 Реакция на продольное поле	29
18.4.2 Экранирование и плазменные колебания	30
18.4.3 Продольная проводимость	33

18.1 Нулевой звук: История. Take-home-message

Напомним основные результаты предыдущей Лекции. Нулевой звук - высокочастотные моды распространения волн в ферми-жидкости в условиях, когда в системе не успевает установиться термодинамическое равновесие. Волны нулевого звука не являются волнами сжатия и растяжения, при его распространении плотность остаётся постоянной, однако изменяется статистическое распределение частиц. Термин “нулевой звук” введен Ландау в связи с тем, что такие волны могут распространяться при $T = 0$. Нулевой звук возникает в случае, когда $\omega\tau \gg 1$, где ω — частота колебаний, τ — время между столкновениями частиц. τ обратно пропорционально квадрату температуры, поэтому при нулевой температуре оно стремится к бесконечности, обеспечивая выполнение условий распространения нулевого звука.

Это явление Л. Д. Ландау предсказал в 1957г. В жидком He3, как и в любой жидкости и газе, обыкновенный звук может распространяться лишь при условии

$$\lambda \gg l \quad (1)$$

где λ — длина волны звука, l — длина свободного пробега частиц жидкости. При таких условиях скорость распространения звука связана со сжимаемостью жидкости обычной формулой

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (2)$$

Особенность ферми-жидкости состоит в том, что в ней длина свободного пробега элементарных возбуждений возрастает с

понижением температуры по закону

$$l \propto \frac{1}{T^2} \quad (3)$$

Поэтому для любой длины волны λ при достаточно низких температурах условие (1) перестает выполняться. Это приводит к затуханию обычного звука и к невозможности его распространения. При абсолютном нуле температур, когда столкновения отсутствуют, обычный звук в ферми-жидкости вообще не может распространяться. Ландау установил, однако, что при определенном характере взаимодействия между элементарными возбуждениями в ферми-жидкости могут распространяться колебания другого рода — нулевой звук. Этот звук распространяется при достаточно низких температурах. Частота и волновой вектор нулевого звука связаны обычным соотношением

$$\omega = c_0 k$$

где скорость c_0 не зависит от k и c_0 уже не определяется простой формулой (2). Величина c_0 зависит от взаимодействия между элементарными возбуждениями в жидкости. Ее можно вычислить, исходя из экспериментальных данных по теплоемкости и сжимаемости жидкости. Расчеты показывают, что в жидком He^3 отличие скоростей обычного и нулевого звука

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{c_0 - c}{c} \approx 0.032.$$

Т.о., общая картина распространения звука в He^3 такова. При достаточно высоких температурах в жидкости распространяется обычный звук. Его затухание пропорционально ω^2/T^2 и возрастает при понижении температуры. При температурах настолько низких, что $\lambda \sim l$, затухание делается весьма большим, так что распространение звука фактически невозможно.

При дальнейшем понижении температуры мы попадаем в область нулевого звука. Затухание звука вновь уменьшается, а скорость его меняется на величину Δc . Затухание нулевого звука пропорционально T^2 и не зависит от частоты. Все описанные особенности распространения были обнаружены экспериментально в работе Абея (1965) [9]. Результаты не оставляют сомнений в том, что теория ферми-жидкости находится в прекрасном количественном согласии с опытом.

Для того чтобы лучше понять разницу между обычным и нулевым звуком, полезно рассмотреть, каким образом меняется при распространении звука распределение по импульсам элементарных возбуждений в жидкости. В равновесии элементарные возбуждения в ферми-жидкости, подобно электронам в металле, заполняют в импульсном пространстве фермиевскую сферу, радиус которой p_0 определяется плотностью жидкости. При распространении обычного звука в каждой точке жидкости существует термодинамическое равновесие. Плотность жидкости, однако, изменена, и все частицы движутся как целое с некоторой скоростью. Поэтому распределение частиц по импульсам можно изобразить ферми-сферой измененного радиуса, сдвинутой в импульсном пространстве на некоторое расстояние. В нулевом звуке картина гораздо сложнее. Термодинамическое равновесие не успевает установиться, ферми-поверхность перестает быть сферой. Она сложным образом деформируется, вытягиваясь в направлении распространения звука. Деформация ферми-сферы при распространении обычного и нулевого звука показана схематически на рисунке.

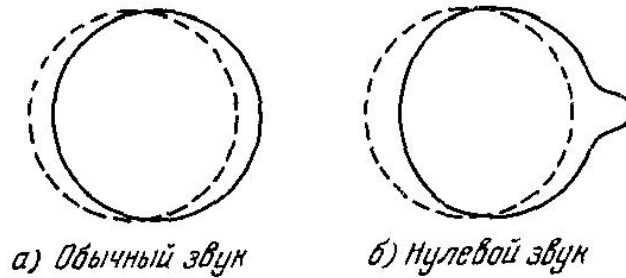


Рис. 18.1: Два типа деформации ПФ при коллективных возбуждениях

18.1.1 Столкновения. Сравнение нулевого звука с первым

Ранее, с помощью кин уравнения мы рассмотрели бесстолкновительный режим

$$\omega \gg \nu \quad (18.1)$$

В этом режиме можно было пренебречь вкладом интеграла столкновений в кин уравнение, что мы и делали. В результате, в этом режиме при условии $F_0 > 0$ нулевой звук является хорошо определенной коллективной модой. Роль возвращающей силы играет самосогласованное поле большого числа частиц. Столкновения между КЧ стремятся разрушить это поле и приводят к затуханию нулевого звука. Но это затухание мало при условии (18.1). Теперь рассмотрим противоположный предел

$$\omega \ll \nu \quad (18.2)$$

За период времени ω^{-1} происходит много столкновений КЧ. Тогда имеет место столкновительный или гидродинамический режим, когда решение кин.уравнения определяется интегралом столкновений. При этих условиях тоже возникают упорядоченные колебания плотности - обычные звуковые гидро-

динамические волны - или волны первого звука. Столкновения играют роль вынуждающей силы и они должны происходить часто, чтобы устанавливать равновесие за время малое по сравнению с периодом движения. Переход между двумя режимами имеет место при

$$\omega \sim \nu. \quad (18.3)$$

В этом режиме столкновения происходят часто, подавляя нуль-звуковую моду. В этом режиме при изменении частоты переходе от первого звука к нулевому должен соответствовать максимум поглощения звуковой волны.

Гидродинамический режим. Первый звук

Возвращаемся к уравнению (18.4 из Лекции ч.3):

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega)u_p + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \sum_{p'} f_{pp'} \delta(\varepsilon_{p'} - \mu)u_{p'} = 0, \quad (18.4)$$

из которого теперь не нужно выбрасывать интеграл столкновений.

Столкновения стремятся восстановить равновесное распределение n_0 . При частотах $\omega \ll \nu$ они стремятся сделать смещение ПФ пренебрежимо малым. Однако, столкновения не могут изменить локальную плотность и поток, поскольку полное число частиц и полный импульс при столкновениях сохраняются. Иначе говоря, столкновения не влияют на компоненты с $l = 0$ и $l = 1$ разложения u по сферическим гармоникам. Поэтому мы можем считать, что при $\omega \ll \nu$ смещение u содержит только члены с $l = 0$ и $l = 1$. Для продольной моды $m = 0$ имеем

$$u(\theta) = a + b \cos \theta. \quad (18.5)$$

Это не будем доказывать, а только поясним. Физически результат (18.5) соответствует колебаниям плотности с одновременным переносом всей жидкости в целом, т.е. как в обычной акустической волне. Чтобы решить кинетическое ур. (18.4) разложим его по полиномам Лежандра. Для $l > 1$ нужно добавить столкновительный член, который приведет к полному затуханию смещений на низких частотах. Напротив, для $l = 0$ и $l = 1$ столкновения вообще не эффективны, т.к. полная плотность и поток должны сохраняться. Поэтому выпишем первые два члена разложения. Используя ур.(18.5) после разложения и упрощения получаем

$$\begin{aligned} l = 0, & \quad -\omega a + \frac{qv_F}{3} \left[1 + \frac{F_1^s}{3} \right] b = 0 \\ l = 1, & \quad -\omega b + qv_F [1 + F_0^s] a = 0 \end{aligned} \quad (18.6)$$

При выводе этого были использованы полученные ранее соотношения

$$\begin{aligned} \frac{m^*}{m} &= 1 + \frac{F_1^s}{3} \\ s^2 &= \left(\frac{p_F^2}{3mm^*} \right) (1 + F_0^s) \end{aligned}$$

Чтобы система уравнений (18.6) имела отличные от нуля решения, ω и q должны удовлетворять уравнению

$$\omega^2 = \frac{q^2 v_F^2}{3} [1 + F_0^s] \left[1 + \frac{F_1^s}{3} \right] \quad (18.7)$$

Итак, мы получили дисперсию обычного первого звука, как низкочастотную распространяющуюся моду.

$$\omega = sq \quad (18.8)$$

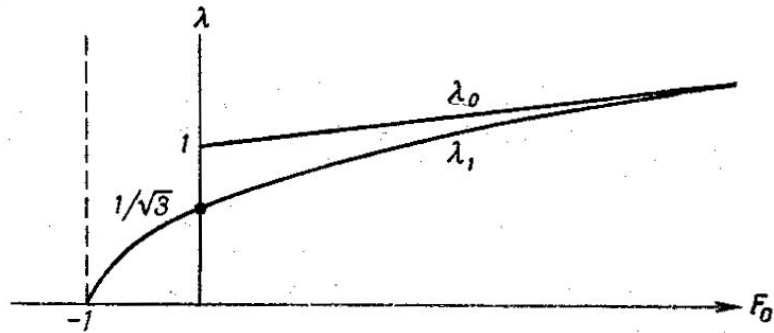


Рис. 18.2: Зависимость приведенных скоростей первого и нулевого звука от величины взаимодействия

где s - скорость звука

Рассмотрим (18.7) для простой модели $F_0^s = F_0$, $F_1^s = 0$:
Получаем приведенную скорость

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{qv_F} = \sqrt{\frac{1 + F_0}{3}} \quad (18.9)$$

На рисунке изображена зависимость скоростей первого и нулевого звука λ_1 λ_2 от F_0 . Видно, что обе моды сливаются в пределе больших F_0 . В области $-1 < F_0 < 0$ нулевой звук затухает, а первый еще есть.

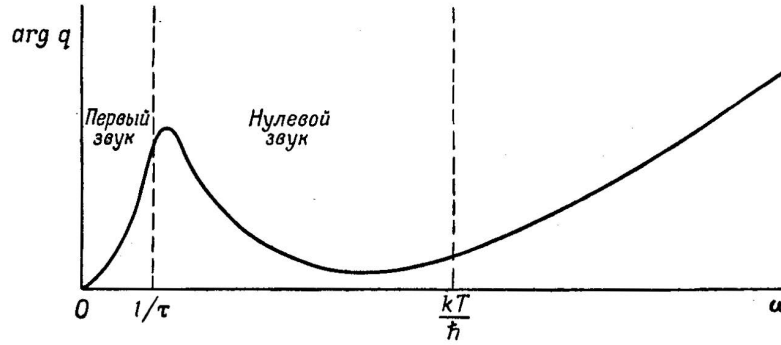


Рис. 18.3: Качественная зависимость затухания звуковых волн от частоты

18.1.2 Параметры ^3He . Take-home message

Дадим сводку основных результатов ферми-жидкостной перенормировки макроскопических параметров

$$C_v = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} k^2 T, \quad (18.10)$$

$$s^2 = \frac{p_F}{3mm^*} (1 + F_0^s), \quad (18.11)$$

$$\chi_p = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\beta^2}{1 + F_0^a}, \quad (18.12)$$

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{F_1^s}{3} \quad \text{для трансляц. инвар. системы} \quad (18.13)$$

где $\beta = e\hbar/2mc = \mu_B$.

В таблице приведены основные макроскопические параметры для жидкого ^3He

Давление (атм)	m^*/m	F_1^s	F_0^s	F_0^a
0.28	3.1	6.3	10.8	-0.67
27.0	5.8	14.4	75.6	-0.72

NB:

1. Как видно, все параметры велики и ${}^3\text{He}$ соответствует режиму сильной связи.
2. $F_0^a < 0$ и среднее взаимодействие между частицами со спинами $\uparrow\downarrow$ больше, чем между частицами со спинами $\uparrow\uparrow$. Этот результат вытекает из принципа Паули, по которому частицы с параллельными спинами стремятся расположиться друг от друга дальше, чем с антипараллельными.
3. Для ${}^3\text{He}$ перенормированная энергия Ферми

$$E_F^0 = \frac{p_F^2}{2m} \approx 5\text{К} \quad (18.14)$$

Такая оценка соответствует голой массе $5 \times 10^{-24}\text{г}$, а p_F вычисляется из измеренной плотности $p_F = \hbar(3\pi^2\rho)^{1/3}$. С учетом перенормировки массы, при давлении 0.28 атм T_F уменьшается втрое. Теория Ландау применима для вырожденной ферми-жидкости, т.е. при $T \ll T_F$, а на практике при $T < 0.1\text{К}$

4. Экспериментально, в жидком ${}^3\text{He}$ обнаружена сильная температурная зависимость m^* и C_v/T , которая не вытекает из простой изложенной теории. Предполагается, что это может быть следствием вклада длинноволнового нулевого звука в перенормировку.

18.1.3 Экспериментальные данные о нулевом звуке

Вообще, нельзя надеяться на то, что излагаемая теория все хорошо и точно опишет. Ведь в кин.уравнении имеется функция $f_{pp'}$, про которую мало что известно. Напомню, что мы заменяли приведенный параметр взаимодействия константой

$F_{pp'} \approx F_0$. В этих терминах нулевой звук существует, если

$$F_0^s > 0 \quad (18.15)$$

При $F_0^s < 0$ коллективная мода подавляется затуханием Ландау.

Спиновые волны существуют если $F_0^a > 0$. Из таблицы для ${}^3\text{He}$ видно, что $F_0^s > 0$ и довольно велико, значит нулевой звук существует как хорошо определенная коллективная мода. С другой стороны, $F_0^a < 0$, значит спиновые волны подавляются затуханием Ландау.

Волны нулевого звука затухают в ϵ раз по сравнению с первоначальной амплитудой на расстоянии $\lambda_0\tau$ (где λ_0 -скорость нулевого звука, а τ — среднее время между соударениями). Следовательно, волны нулевого звука затухают на расстоянии того же порядка, что средняя длина пробега квазичастиц. Так как средняя длина свободного пробега квазичастиц достаточно велика только при очень низких температурах, нужно ожидать, что только при очень низких температурах будут возможны измерения характеристик нулевого звука с помощью экспериментов, связанных с биениями или резонансами. Для наблюдения нулевого звука необходимо также, чтобы выполнялось условие $\omega\tau > 1$, где ω — угловая частота звука.

Наиболее прямой способ наблюдения нулевого звука - изучение распространения ультразвука в ${}^3\text{He}$. При увеличении ω должен наблюдаться максимум в поглощении волны, когда частота равна частоте столкновений $1/\tau$. При этом происходит переход от первого звука к нулевому. Частота, которая соответствует максимуму поглощения порядка 10^{10} Гц. Нулевой звук экспериментально обнаружен в жидком ${}^3\text{He}$ В. Абелем, А. Андерсоном и Дж. Уитли (1966). В температурном интервале от 2 до 100 мК и давлении 0.32 атм среднее значение ско-

рости обычного звука составило 187.9 м/с, а нулевого звука — 194.4 м/с (на частотах 15.4 и 45.5 МГц). На высоких частотах нулевой звук может существовать также и в металлах, электроны в которых образуют заряженную ферми-жидкость. Кин и др. измеряли акустический импеданс в ^3He как функцию температуры и наблюдали максимум в районе 0.09К (обзор экспериментов по состоянию на 1967г. дан в обзоре В. Р. Абея и др. в УФН). Другое свидетельство существования нулевого звука было получено из измерения сопротивления Капицы на границе ^3He и металла. Кроме того, для измерения спектра возбуждений проводились эксперименты с рассеянием γ -квантов и неупругим рассеянием света в жидком ^3He .

18.2 Столкновения квазичастиц

До сих пор столкновения игнорировались. Такое можно было сделать при частотах $\omega\tau \gg 1$, превышающих частоту столкновения $1\tau = \nu$, или, что то же самое, для длин волн меньше чем средняя длина свободного пробега. В данном разделе сфокусируемся на интеграле столкновения I вне упомянутых ограничений.

18.2.1 Структура интеграла столкновений

Простейший процесс столкновений в кинетической теории газов - это парный процесс

$$(\mathbf{p}_1) + (\mathbf{p}_2) \rightarrow (\mathbf{p}'_1) + (\mathbf{p}'_2) \quad (18.16)$$

Пусть \mathbf{p}_1 - термически возбужденная КЧ со свободной энергией kT . Чтобы выполнялся принцип Паули и закон сохранения энергии, все импульсы \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}'_1 и \mathbf{p}'_2 должны лежать в пределах

kT вблизи ПФ. Поэтому при $T \rightarrow 0$ вероятность столкновений обращается в нуль, т.к. разрешенные состояния отсутствуют и полоска kT имеет нулевую ширину. Цель данного раздела показать, что частота столкновений имеет порядок T^2 . Наряду с парными процессами (18.16) могут иметь место и более сложные, с участием большего числа частиц. Соответствующий интеграл столкновений довольно громоздок. Он анализировался Абрикосовым и Халатниковым [12]. Вместо этого анализа приведем оценку вероятности перехода

$$\begin{aligned} W_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi) &= \frac{2\pi}{\hbar} |A_{\uparrow\uparrow}(\theta, \varphi)|^2, \\ W_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi) &= \frac{2\pi}{\hbar} |A_{\uparrow\downarrow}(\theta, \varphi)|^2 \end{aligned} \quad (18.17)$$

Здесь φ - угол между плоскостями $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ и $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$, а θ - угол между векторами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Для малых передаваемых энергий φ мал: $\varphi \ll 1$. Если $\varphi = 0$, то передаваемая при столкновении энергия $\hbar\omega$ равна $\mathbf{q}\mathbf{v}_F$, где \mathbf{q} - передаваемый при столкновении импульс.

Зная их можно оценить по порядку амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} A_{\uparrow\uparrow} &\sim \frac{\pi\hbar^3}{m^*p_F} [F_0^s + F_0^a] \\ A_{\uparrow\downarrow} &\sim \frac{\pi\hbar^3}{m^*p_F} [F_0^s - F_0^a] \end{aligned} \quad (18.18)$$

18.2.2 Время жизни квазичастиц Ландау

Предположим, что в момент времени $t = 0$ мы вносим дополнительную КЧ в вырожденную ФЖ, находящуюся в равновесии при температуре T . Распределение n_p начинает распа-

даться по обычному закону

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} = -\frac{n_{\mathbf{p}}}{\tau_p}, \quad (18.19)$$

где τ_p - время жизни квазичастицы. Отсюда следует, что вероятность найти КЧ уменьшается со временем как $\exp(-t/\tau_p)$.

Простейший процесс распада таков: КЧ \mathbf{p} распадается на две КЧ \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 и квазидырку \mathbf{p}_2 . Можно представить себе конечно процессы распада и с большим количеством КЧ, но ими можно пренебречь при низких температурах $kT \ll \mu$ в области энергий близких к ПФ $|\varepsilon_p - \mu| \ll \mu$. Тогда после несложных, но громоздких вычислений получаем

$$\frac{1}{\tau_p} \propto T^2 \quad \text{для} \quad |\varepsilon_p - \mu| \ll kT \quad (18.20)$$

В другом предельном случае большого отклонения от ПФ получаем

$$\frac{\hbar}{\tau_p} = \frac{(\varepsilon_p - \mu)^2}{\bar{\varepsilon}} \quad \text{для} \quad |\varepsilon_p - \mu| \gg kT \quad (18.21)$$

где $\bar{\varepsilon}$ имеет размерность энергии.

Главное что нужно отметить - это квадратичная зависимость \hbar/τ_p от свободной энергии $(\varepsilon_p - \mu)$. Мы уже отмечали вероятность найти частицу \mathbf{p} уменьшается экспоненциально со временем $\propto \exp(-t/\tau_p)$. Соответствующая амплитуда вероятности изменяется как $\propto \exp(-t/2\tau_p)$. Выразим этот процесс добавляя к обычной действительной энергии ε_p мнимую часть

$$i\Gamma_p = \frac{i\hbar}{2\tau_p} = i\frac{(\varepsilon_p - \mu)^2}{2\bar{\varepsilon}}. \quad (18.22)$$

Конечное время жизни приводит к неопределенности в энергии. Вблизи ПФ величина Γ_p пренебрежимо мала по сравнению со свободной энергией и понятие КЧ имеет смысл. Напротив, далеко от ПФ квазичастицы неустойчивы.

18.2.3 Задачи

1. Вычислить спиновую восприимчивость из Лекции ч.2

$$\chi_P = \frac{M}{\Omega H} = \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\mu_B^2}{1 + F_0^a} \quad (18.23)$$

без помощи величины $\tilde{\delta}n_p$, т.е. учитывая явно изменение энергии КЧ вследствие намагничивания.

2. Вывести дисперсионное уравнение из Лекции ч.2 для нулевого звука

$$\frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} - 1 = \frac{1}{F_0} \quad (18.24)$$

3. Вычислить члены первого порядка в разложении амплитуды рассеяния $\mathcal{A}_{pp'}(\mathbf{q}, \omega)$ по степеням qv_F/ω или ω/qv_F .

18.3 Заряженные ферми-жидкости

Рассмотрим систему взаимодействующих электронов. Чтобы обеспечить ее устойчивость считаем, что полный заряд электронов компенсируется однородным положительным зарядом, плотность которого равна средней электронной плотности. При высоких плотностях и низких температурах невзаимодействующие электроны подчиняются статистике Ферми-Дирака. Систему можно рассматривать как *квантовую плазму*. Есть некоторая аналогия с классической плазмой, которая подчиняется статистике Больцмана и распределению Максвелла, а также аналогия с нейтральной ферми-жидкостью.

18.3.1 Экранирование и плазменные колебания: Введение

Кулоновское взаимодействие дальнедействующее (в отличие от случая ${}^3\text{He}$), поэтому заряженная ферми-жидкость сильно отличается от нейтральной. Большой радиус кулоновского взаимодействия приводит к расходимостям в вычислениях, которые нужно устранить. Причина расходимостей в том, что данный электрон взаимодействует с большим числом других электронов, так что его движение нельзя отделить от движения остальных. В импульсном пространстве трудности возникают при рассмотрении той части взаимодействия, которая отвечает малому передаваемому импульсу. Найдём фурье-компоненту кулоновского взаимодействия (в 3D случае):

$$V_q = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^2}{r} = \frac{4\pi e^2}{q^2}$$

Производя любое вычисление по теории возмущений можно убедиться, что сочетание множителей $1/q^2$ приводит к логарифмическим расходимостям.

рифмической или более высокой расходимости. Как избежать таких расходимостей?

На самом деле, эффективное взаимодействие не является настоящим. Когда электрон движется, он стремится раздвинуть другие электроны вследствие кулоновского отталкивания. Можно сказать, что электрон окружен “экранирующей дыркой”- областью в которой вероятность нахождения другого электрона мала. Другими словами, экранирующая дырка соответствует распределению положительного заряда, который стремится компенсировать отрицательный заряд рассматриваемого электрона. В результате, на больших расстояниях электростатическое поле электрона экранируется.

Когда же электрон движется, он стремится перенести экранирующую дырку. Это есть *динамическое экранирование* и оно отличается от *статического экранирования* неподвижного заряда. Экранирующая дырка обладает инерцией! Далее рассмотрим оба эти свойства.

Статическое экранирование

Вначале изучим статическое экранирование, т.е. реакцию заряженной плазмы на статический внешний заряд. Рассмотрим заряд Z , находящийся в квантовой плазме в начале координат $\mathbf{r} = 0$. Электростатический потенциал $\varphi(\mathbf{r})$, действующий на электрон вдали от начала создается не только зарядом Z . Отдаленный электрон реагирует как на внешний заряд Z , так и на индуцированный поляризационный заряд $e\langle\rho(\mathbf{r})\rangle$.

Эффективный потенциал и поляризационный заряд связаны уравнением Пуассона

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi[Z\delta(\mathbf{r}) + e\langle\rho(\mathbf{r})\rangle]. \quad (18.25)$$

Вместо волновых функций будем оперировать с плотностью зарядов, т.е. используем простейшее приближение Томаса-Ферми. Считаем, что электрохимический потенциал постоянен в системе, находящейся в равновесии. Электрохимический потенциал равен сумме кинетической энергии ε_F^0 и потенциальной энергии $e\varphi$ заряда в поле. Кин. энергия в этом приближении есть энергия невзаимодействующих электронов (для 3D случая)

$$\varepsilon_F^0 = \frac{(3\pi^2 N)^{2/3}}{2m} \quad (18.26)$$

Поскольку $e\varphi(\mathbf{r})$ зависит от координаты, значит и кин. энергия ε_F^0 должна зависеть от \mathbf{r} .

$$\varepsilon_F^0(\mathbf{r}) = \varepsilon_F^0 - e\varphi(\mathbf{r}) \quad (18.27)$$

Флуктуации $\varepsilon_F^0(\mathbf{r})$ приводит к флуктуациям плотности частиц $N(\mathbf{r})$. В первом порядке по этой флуктуации имеем

$$\begin{aligned} \delta N &= N \frac{3e\delta\varphi(\mathbf{r})}{2\varepsilon_F^0} \quad \text{и} \\ \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{3Ne\varphi(\mathbf{r})}{2\varepsilon_F^0} \end{aligned} \quad (18.28)$$

Подставляя (18.28) в (18.25) и переходя к фурье-компонентам в получившемся уравнении находим

$$(q^2 + q_{TF}^2) \varphi_q = 4\pi Z \quad (18.29)$$

и

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Z}{r} e^{-q_{TF}r}, \quad (18.30)$$

где q_{TF} волновой вектор экранирования Томаса-Ферми

$$q_{TF} = \left(\frac{6\pi N e^2}{\varepsilon_F^0} \right)^{1/2} \quad (18.31)$$

Из (18.30) видно, что поле внешнего заряда эффективно экранируется на расстояниях $\sim q_{TF}^{-1}$. радиус экранирования определяется конкуренцией между влиянием потенциальной энергии взаимодействия и кин. энергией. Выразим радиус экранирования в единицах расстояния между частицами

$$r_0^3 = \frac{3}{4\pi N}$$

$$\frac{\lambda_{TF}}{r_0} = \left[\left(\frac{8\pi}{9} \right) \frac{\varepsilon_F^0}{e^2/r_0} \right]^{1/2} \quad (18.32)$$

В 3D электронном газе в металлах потенциальная энергия на частицу e^2/r_0 сравнима с кин. энергией на частицу, так что радиус экранирования λ_{TF} сравним с r_0 . Поэтому экранирование в 3D металлах очень эффективно. Именно поэтому приближение “почти свободных электронов”, т.е. их описание плоской волной, хорошо работает. Иными словами, эффективное экранирование электронами потенциала ионов приводит к тому, что волновая функция электронов проводимости слабо отличается от плоской волны.

Приближение Томаса-Ферми не является точным. Оно применимо только для вычисления реакции системы на длинноволновые компоненты внешнего потенциала, которые медленно изменяются в пространстве, по сравнению с расстоянием между частицами. В противном случае предположение о локальной связи (18.26, 18.27) между плотностью частиц и энергией Ферми несправедливо. Поэтому результат (18.29) несколько корректнее нужно записать так

$$\varphi_q = \frac{4\pi Z}{q^2 + q_{TF}^2} \quad (qr_0 \ll 1) \quad (18.33)$$

Но и это не точно, т.к. (18.26) описывает только невзаимодействующие электроны и следовательно, приведенные результаты применимы только в пределе малых r_s .

В типичных металлах потенциальная энергия сравнима с кинетической и поля экранируются на межатомных расстояниях. Приближение Томаса-Ферми при этом не работает по двум причинам:

Во-первых отсутствует приближение среднего поля, пригодное на масштабах больше межатомного.

Во-вторых, в Томас-Фермиевском приближении мы пренебрегли взаимодействием между электронами, что возможно только при $E_F \gg e^2/r_0$.

Приближение Томаса-Ферми для 2D случая

Рассматриваем двумерный лист электронного газа с нулевой толщиной, находящийся при $z = 0$ (маленькой буквой z обозначена координата в реальном пространстве, перпендикулярная плоскости $x - y$ двумерной системы). Лист окружен однородной средой с диэлектрической постоянной ϵ при $z < 0$ и $z > 0$. В двумерных электронных системах легко разделить положительные и отрицательные заряды пространственно. В этом случае для положительного заряда очень хороша модель однородного положительно заряженного фона. Часто мы будем применять ту же модель и к трехмерным системам. Кулоновские силы очень медленно спадают с расстоянием (у взаимодействия вообще нет характерного радиуса). Как уже говорилось, из-за дальнего характера кулоновского поля любой расчет с необрезанным взаимодействием приведет к расходимости. Подобные расходимости возникают, например, при вычислении энергии основного состояния во втором

порядке теории возмущений или при вычислении групповой скорости на поверхности Ферми в приближении Хартри-Фока.

Электростатический потенциал, производимый внешним источником связан с плотностью заряда электронов уравнением Пуассона

$$\nabla \cdot (\varkappa \nabla \varphi) = -4\pi\rho \quad (18.34)$$

Выясним на самом простом качественном уровне отличие между 3D и 2D системами. Фурье-компонента кулоновского потенциала равна в 3D случае

$$V_{\mathbf{q}} = \int d^3\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) e^2/r = 4\pi e^2 q^{-2} \quad (18.35)$$

а для двумерных систем

$$V_{\mathbf{q}} = \int d^2\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) e^2/r = 4\pi e^2 q^{-1} \quad (18.36)$$

Появление степени q в знаменателе выражений (18.35) и (18.36) приводит к расходимостям, упомянутым выше. Из-за отталкивания между электронами, любой «пробный» электрон окружен обеднением электронной плотности. Компенсирующий положительный заряд области обеднения и обрезает взаимодействие.

В 2D случае возникнет другой параметр экранирования

$$q_s = \frac{2\pi^2}{e} \varkappa \frac{dN_s}{dE_F} \quad (18.37)$$

Более точно, при учете экранирования, экранированный кулоновский потенциал можно разложить по Фурье с Бесселевскими функциями [2]

$$\varphi(r, Z) = \int_0^\infty q A_q(Z) J_0(qr) dq, \quad (18.38)$$

где J_0 - Бесселевские функции нулевого порядка, Z - внешний заряд. В этих терминах решение ур. (18.34) имеет вид

$$A_q = \frac{Z}{\varkappa} \frac{1}{q + q_s} \quad (18.39)$$

Решением уравнения Пуассона (18.34) в пределе больших r будет гораздо более медленная зависимость $\propto 1/r^3$

$$\varphi(r) \sim \frac{Z(1 + q_s z_0)}{\varkappa q_s^2 r^3} \quad \text{для } q_s r \gg 1 \quad (18.40)$$

Эта кубическая зависимость вместо экспоненциальной является одним из принципиальных отличий двумерного экранирования от трехмерного. Мы увидим позже, когда снимем длинноволновое ограничение, при рассмотрении динамического экранирования, что фурье-компонента диэлектрической аномалии $\varkappa(q)$ испытывает сингулярность при $q = 2k_F$. В результате в экранировании возникают Фриделевские осцилляции и экранирование потенциала с расстоянием становится еще более плавным [3]

$$\varphi(r) \sim \frac{Z q_s}{\varkappa} \frac{4k_F^2}{(2k_F + q_s)^2} \frac{\sin(2k_F r)}{(2k_F r)^2} \quad (18.41)$$

Динамическое экранирование

Заряды не стоят на месте, а движутся и нужно рассмотреть динамику электрон-электронного экранирования в плазме, в зависимости от частоты. Движущийся электрон старается перенести с собой экранирующую его дырку. Однако степень успешности этого действия зависит от скорости экранируемой

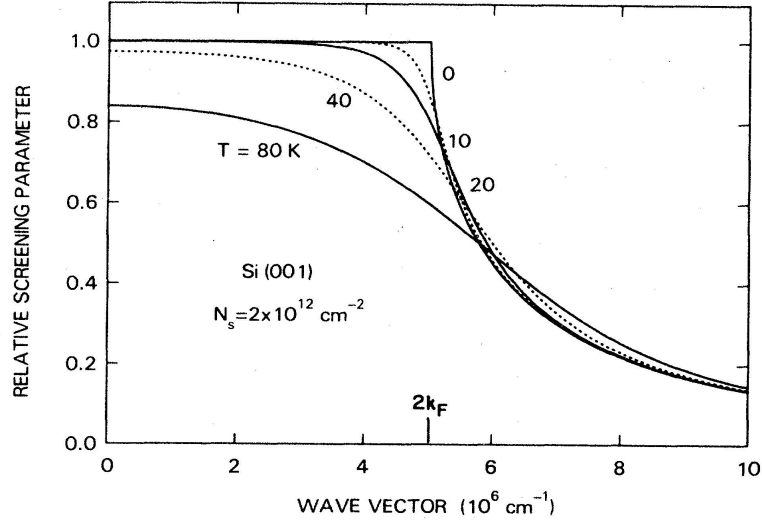


Рис. 18.4: Зависимость параметра экранирования q_s от волнового вектора

частицы. Другими словами, можно ожидать, что динамическое экранирование перемещающегося заряда будет отличаться от статического экранирования.

Введем в плазму заряд Z , который движется со скоростью \mathbf{V}_e и в момент $t = 0$ находится в точке $r = 0$. Плотность заряда созданная им

$$Z\rho_e(\mathbf{r}, t) = Z\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_e t) \quad (18.42)$$

Снова этот заряд будет поляризовать электроны вокруг него и возникший электронный поляризационный заряд $e\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle$ теперь зависит от времени. Эффективный потенциал и электронный заряд связаны зависящим от времени уравнением Пуассона.

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi [Z\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}_e t) + e\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle] \quad (18.43)$$

Делая в (18.43) преобразование Фурье по координатам и вре-

мени получаем

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{4\pi}{q^2} [Z2\pi\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e) + e\langle\rho(\mathbf{q}, \omega)\rangle]. \quad (18.44)$$

Задача об экранировании пробного заряда свелась к определению поляризационной плотности $\langle\rho(\mathbf{q}, \omega)\rangle$, которая зависит от частоты и волнового вектора. Эта величина есть мера динамического экранирования в электронном газе.

Рассмотренная задача является простейшим примером и к той же проблеме сводится и вопрос об экранировании межэлектронного взаимодействия. Каждый электрон в системе подобен движущемуся пробному заряду и поляризует свой окружение. Другой электрон “видит” наш выделенный пробный электрон и созданное им зависящую от времени поляризационное облако. Т.о., эффективное взаимодействие динамически экранируется. Учет динамического экранирования снимает упомянутые выше расходимости в энергии основного состояния.

18.3.2 Плазменные колебания: Введение

Как известно из курса общей физики, в среде взаимодействующих частиц (с экранированием) могут распространяться плазменные колебания. И экранирование и плазменные колебания являются результатом поляризационных явлений в плазме, они должны рассматриваться в рамках общего подхода. Элементарная качественная картинка на уровне курса общей физики такова. Когда электрон летит стремясь заэкранировать возникшее зарядовое возмущение в плазме, то он совершает “перелет”, затем возвращается обратно, затем снова перелетает и т.д. Это есть колебательный процесс вблизи ней-

трального состояния (в теории колебаний этот процесс отвечает недодемпфированной системе). Возвращающей силой является просто среднее самосогласованное поле всех электронов. Все точно также как и при возникновении колебаний в нулевом звуке. Однако, для заряженной плазмы (в отличие от нейтральных атомов ${}^3\text{He}$) радиус действия кулоновских сил велик и поэтому частота колебаний намного выше. Для длинноволнового предела частота постоянна и равна

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi N e^2}{m} \right)^{1/2}. \quad (18.45)$$

Давайте повторим его вывод, так как это делается в курсе общей физики.

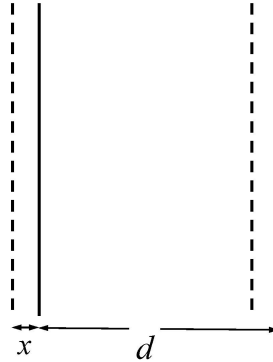


Рис. 18.5: Смещение заряженного слоя

Предположим, что неравновесное распределение заряда в плазме создано смещением заряженного слоя толщиной d на расстояние $x \ll d$ (Рис. 18.5). Такой слой подобен плоскому конденсатору. Возникает постоянное поле \mathcal{E} , которое стремится восстановить нейтральность.

$$\mathcal{E} = -4\pi N e x, \quad (18.46)$$

так как поверхностный заряд на каждой стороне конденсатора равен Nex . Движение электрона в поле описывается уравнением

$$m\ddot{x} = e\mathcal{E} = -4\pi Ne^2x \quad (18.47)$$

Из этого колебательного уравнения следует, что слой колеблется с частотой ω . При выводе мы пренебрегли хаотическим движением электронов. Ниже мы рассмотрим динамику плазмы более точно.

18.4 Диэлектрическая реакция на электрическое поле

18.4.1 Реакция на продольное поле

Предположим, что в систему электронов введены внешние заряды с плотностью $Z\rho_e(\mathbf{r}, t)$. Тогда в системе возникает электрическое поле с индукцией $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$; ситуация описывается уравнением Пуассона (мы предполагаем, что диэлектрическая проницаемость, связанная с зарядами ионных остовов, равна единице):

$$\operatorname{div}\mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = -4\pi Z\rho_e(\mathbf{r}, t) \quad (18.48)$$

где $Z\rho_e(\mathbf{r}, t)$ - плотность стороннего заряда, введенного в газ в точке \mathbf{r} . Мы видели, что внешнее поле поляризует электронную систему. Появление индуцированного полем $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ пространственного заряда $\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle$ в системе создаст дополнительное электрическое поле \mathcal{G}_p . Полное электрическое поле \mathcal{G} состоит из суммы

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{G}_p(\mathbf{r}, t), \quad (18.49)$$

где

$$\operatorname{div} \mathcal{G}_p(\mathbf{r}, t) = 4\pi e \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (18.50)$$

Объединяя (18.48) - (18.50) запишем:

$$\operatorname{div} \mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = 4\pi [Z\rho_e(\mathbf{r}, t) + e \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle] \quad (18.51)$$

В (18.48) и (18.51) перейдем к Фурье-компонентам по координатам и времени

$$i\mathbf{q} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi Z\rho_e(\mathbf{q}, \omega) \quad (18.52)$$

$$i\mathbf{q} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi [Z\rho_e(\mathbf{q}, \omega) + e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle] \quad (18.53)$$

Предположим, что индуцированный заряд $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ сам пропорционален приложенному полю \mathcal{D} (это условие линейной реакции справедливо при слабом внешнем поле). Тогда мы пренебрегаем членами порядка \mathcal{D}^2 и выше. В результате, \mathcal{D} и \mathcal{G} , как чисто продольные поля, оказываются пропорциональными величинами:

$$\mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\mathcal{D}(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (18.54)$$

где $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ - фурье-компонента диэлектрической проницаемости. Она показывает в какой мере внешнее поле \mathcal{D} экранируется индуцируемой им электронной поляризацией. $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ выражается через $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$:

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + 4\pi i e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / (\mathbf{q} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega)) \quad (18.55)$$

$$\epsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - 4\pi i e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / (\mathbf{q} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{q}, \omega)) \quad (18.56)$$

18.4.2 Экранирование и плазменные колебания

Мы видели, что с помощью $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ можно описать линейную реакцию плазмы на внешнее поле. Рассмотрим еще раз при-

мер из предыдущего раздела: статический заряд Z , помещенный в начало координат. Фурье-компоненты истинного потенциала $\varphi(\mathbf{q})$ равна

$$\varphi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Z}{q^2 \epsilon(\mathbf{q}, 0)} \quad (18.57)$$

Статическая диэлектрическая проницаемость, зависящая от волнового вектора, $\epsilon(\mathbf{q}, 0)$, описывает экранирующее действие электронной системы. В приближении Томаса-Ферми, сравнивая (18.57) и (18.33), находим:

$$\epsilon_{TF}(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{q_{TF}^2}{q^2} \quad (qr_0 \ll 1) \quad (18.58)$$

Самые проницательные могут теперь догадаться, что в проводящей среде изменение заряда под действием внешнего поля будет определяться проводимостью. Действительно,

$$e\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \sigma(\mathbf{q}, \omega) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega); \quad (18.59)$$

Здесь $\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ - это средний поток частиц. $\partial\langle\rho\rangle/\partial t + \text{div}\langle\mathbf{J}\rangle = 0$, следовательно, $\mathbf{q}\langle\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)\rangle - \omega\langle\rho(\mathbf{q}, \omega)\rangle = 0$. Из этих соотношений получаем искомое:

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma(\mathbf{q}, \omega)}{\omega} \quad (18.60)$$

Для тех же кто не верит на слово, докажем это. Предположим, что заряд движется с некоторой скоростью V_e ; тогда вместо (18.44) для фурье компоненты истинного потенциала $\varphi(\mathbf{r}, t)$ можем написать

$$\varphi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{4\pi Z 2\pi \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{V}_e)}{q^2 \epsilon(\mathbf{q}, \omega)} \quad (18.61)$$

Динамическое экранирующее действие электронного газа описывается проницаемостью $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$.

Зная $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$, можно записать дисперсионное уравнение для плазменных колебаний. Рассмотрим уравнения (18.53) и (18.53) в отсутствие стороннего заряда. Представим их в виде:

$$\begin{aligned}\epsilon(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{q} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega) &= 0 \\ i\mathbf{q} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega) &= 4\pi e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle\end{aligned}\quad (18.62)$$

Эти уравнения имеют замечательное, но малоинтересное решение:

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \langle q \cdot G(q, \omega) \rangle = 0, \quad (18.63)$$

но соответствует отсутствию зарядов и электрического поля в плазме.

Однако, для частоты ω_q такой, что

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega_q) = 0 \quad (18.64)$$

могут существовать отличные от нуля электрическое поле $\mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega)$ и плотность зарядов $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$. Другими словами, возникают свободные колебания плотности заряда в отсутствие внешнего поля. Т.о., соотношение (18.64) есть условие существования плазменных колебаний с частотой ω_q . При этом в плазме существует продольное электрическое поле. Далее увидим, что в пределе длинных волн ($\mathbf{q} \rightarrow 0$) диэлектрическая проницаемость равна

$$\epsilon(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (18.65)$$

Т.о., мы подтвердили простые качественные вычисления, приведенные выше.

18.4.3 Продольная проводимость

Сейчас нам не составит труда дополнить составленную выше картину реакцией электронной системы на приложенное электрическое поле, выражая реакцию в терминах проводимости, т.е. отношения индуцированного в системе тока $e\mathbf{J}$ к эффективному электрическому полю \mathcal{G} . Для рассматриваемых полей, которые изменяются в пространстве и времени, можно написать

$$e\langle\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)\rangle = \sigma(\mathbf{q}, \omega)\mathcal{G}(\mathbf{q}, \omega) \quad (18.66)$$

Здесь $e\langle\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)\rangle$ - фурье-компонента индуцированного тока, а $\sigma(\mathbf{q}, \omega)$ - скалярная продольная проводимость (диагональная компонента). Рассматривается только продольное внешнее электрическое поле и всегда предполагается, что система изотропна. Между σ и ϵ имеется простая связь. Чтобы ее получить, используем уравнение непрерывности для заряда и индуцированного тока в электронном газе:

$$\text{div}\langle\mathbf{J}\rangle + \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t} = 0 \quad (18.67)$$

Выполним над (18.67) преобразование Фурье.

$$\mathbf{q} \cdot \langle\mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega)\rangle = \omega\langle\rho(\mathbf{q}, \omega)\rangle \quad (18.68)$$

Теперь умножим обе части (18.66) на \mathbf{q} и используя (18.56) и (18.68) получим

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i\sigma(\mathbf{q}, \omega)}{\omega}. \quad (18.69)$$

Литература

- [1] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **32**, 59 (1957).
- [2] T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 43 (1982).
- [3] F. Stern, Phys. Rev. Lett. **18**, 546 (1967).
- [4] Д. Пайнз, Ф. Нозьер, *Теория квантовых жидкостей*, М., Мир, 1967
- [5] P. Nozieres, *Theory of Interacting Fermi Systems* (W.A. Benjamin, 1964) Более техничная чем предыдущая книга, хороша для деталей вычислений.
- [6] L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, (McGraw-Hill, 1971).
- [7] G. D. Mahan, *Many particle physics*, Kluwer/Plenum 3rd edition (2000). ISBN 0-306-46338-5
- [8] А.А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, М., Наука, 1987
- [9] W. R. Abel. A. C. Anderson, W. C. Black, J. C. Wheatley, *Thermal and Magnetic Properties of Liquid He3 at Low Pressure and at Very Low Temperatures*, Physics **1**, 337 (1965). УФН **91**, 261 (1967).

- [10] G.S. Uhrig, *Correlated Fermionic Systems: Fermi Liquid and Luttinger Liquid*, Tohoku University, Sendai, Japan (2004)
- [11] W. Kohn, J. Luttinger, Phys. Rev. Lett., **15**, 524 (1956)
- [12] В. П. Силин ЖЭТФ **33**, 495 (1957).
- [13] Götze, S. Uhrig, *Correlated Fermionic Systems: Fermi Liquid and Luttinger Liquid*, Tohoku University, Sendai, Japan (2004)