

Глава 18

Введение в теорию ферми-жидкости. Часть 3

Оглавление

18 Введение в теорию ферми-жидкости. Часть 3	1
18.1 Кинетическое уравнение для квазичастиц. . . .	4
18.1.1 Определение неоднородных функций рас- пределения	4
18.1.2 Разложение энергии	9
18.1.3 Кинетическое уравнение для квазичастиц	11
18.1.4 Нулевой звук в ферми-жидкости	14
18.1.5 Качественная структура неоднородного воз- буждения	16
18.1.6 Простая модель нулевого звука	21
18.1.7 Экспериментальные данные по нулевому звуку	26
18.2 Затухание Ландау	26
18.2.1 Обзор решений типа коллективных мод .	26
18.2.2 Время жизни квазичастиц	26
18.2.3 Сравнение нулевого звука с первым . . .	26
18.2.4 ^3He : параметры теории ферми-жидкости	26
18.3 Заряженные ферми-жидкости	26
18.3.1 Экранирование и плазменные колебания	26

В предыдущей лекции была изложена основа теории ферми-жидкости Ландау. Она дает идеологию, с помощью которой перенормировка различных свойств взаимодействующей системы выражается через различные константы ферми-жидкостного взаимодействия. Однако, нас интересует не столько идеология, как практическая возможность находить перенормированные свойства в зависимости от параметра взаимодействия r_s . Как и в предыдущей лекции я следую изложению из оригинальной статьи Ландау [1]. Но использую более подробные рассуждения “вокруг” вопроса из книги Нозьера и Пайнса [2].

Были рассмотрены равновесные термодинамические свойства: плотность состояний, сжимаемость, магнитная восприимчивость, а также перенос массы (поток квазичастиц). Отсюда мы выяснили перенормировку сжимаемости, скорости звука, эффективной массы, восприимчивости.

В данной лекции рассмотрим кинетические свойства, среди которых наиболее яркое - нулевой звук.

18.1 Кинетическое уравнение для квазичастиц.

18.1.1 Определение неоднородных функций распределения

До сих пор мы рассматривали только стационарные распределения квазичастиц, у которых зависимость функции распределения $n_{\mathbf{p}}$ от координат и времени отсутствовала. Теперь введем слабое возмущение, зависящее от координат и времени $n(\mathbf{r}, t)$. Такое возмущение может быть вызвано внешними полями, либо собственными флуктуациями в системе. Возмуще-

ние предполагаем слабым, а реакция системы будет линейна по возмущению.

Вообще говоря, введение координатной зависимости для функции от импульса предполагает, что обе величины - координата и импульс - измеримы одновременно. Поэтому введение $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$, в принципе, противоречит принципу неопределенности, а значит, все появляющиеся ниже уравнения имеют ограниченную точность. Это ограничение практически снимается если мы рассматриваем макроскопические явления, в которых волновые вектора и частоты много меньше характерных атомных параметров.

Рассмотрим фурье-преобразование функции $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$. В линейном приближении каждую фурье-компоненту можно рассматривать независимо. Поэтому можно рассмотреть возмущение в виде плоской волны с волновым вектором $\mathbf{q}$ и частотой ω . Тогда функция распределения

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = n_{\mathbf{p}}^0 + \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (18.1)$$

Когда так можно делать?

Характерная ширина размытия ПФ есть kT по энергии и kT/v_F по импульсу. Тогда введенная нами Фурье-компонента функции распределения $\delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega)$ имеет смысл, если

$$\begin{aligned}\bar{q}v_F &\ll kT \\ \hbar\omega &\ll kT\end{aligned}\tag{18.2}$$

Это есть “классический” режим, в смысле соотношения неопределенности. Условия (18.2) слишком строгие. Фактически, теория Ландау применима в гораздо более широком интервале:

$$\begin{aligned}\bar{q}v_F &\ll \mu \\ \hbar\omega &\ll \mu\end{aligned}\tag{18.3}$$

Но для этого нужно расширить понятие функции распределения $\delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega)$. До сих пор мы это определяли как вероятность найти квазичастицу с волновым вектором $\mathbf{p} = \mathbf{p}_F + \hbar\mathbf{q}$. Чтобы выполнялось условие (18.3) нужно понимать $\delta n_{\mathbf{p}}$ как вероятность найти пару - квазичастицу с импульсом $\mathbf{p}_F + (\hbar\mathbf{q}/2)$ и квазидырку с импульсом $\mathbf{p}_F - (\hbar\mathbf{q}/2)$.

В соответствии со сказанным теорию Ландау можно применять к макроскопическим возмущениям, пространственные масштабы которых велики по сравнению с атомными масштабами. Иначе говоря, длина волны возмущения должна быть велика по сравнению с межатомными размерами, а частота должна быть мала по сравнению с атомными частотами. Любой результат теории Ландау должен быть главным членом разложения реакции системы по малому параметру (q/k_F) или $(\hbar\omega/\mu)$.

18.1.2 Разложение энергии

Рассмотрим состояние, характеризуемое функцией распределения

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = n_{\mathbf{p}}^0 + \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t). \quad (18.4)$$

$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ есть распределение для единичного объема $\Omega = 1$ около точки $\mathbf{r}$, а импульс, соответственно, квантован в объеме $\Omega = 1$. Полная энергия $E[n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)]$ есть функционал от функции распределения. Пусть отклонение $\delta n_{\mathbf{p}}$ мало, тогда разложим функционал в ряд Тэйлора.

$$\begin{aligned} E = & E_0 + \sum_{\mathbf{p}} \int d^3\mathbf{r} \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \int \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}') \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (18.5)$$

Предположим, что система инвариантна относительно пространственной трансляции. Тогда энергия $\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \varepsilon_p$ не зависит от $\mathbf{r}$. Кроме того, $f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}')$ зависит только от разности $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Если возмущение медленно изменяется в пространстве и времени (т.е. имеет макроскопический масштаб), то $\delta n_{\mathbf{p}}$ можно считать постоянной на расстоянии порядка радиуса взаимодействия (NB: это оправдано для ^3He , но требует обоснования для кулоновского взаимодействия). В выражении (18.5) отклонение $\delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}')$ можно заменить на $\delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r})$. Тогда выражение для энергии упростится

$$E = E_0 + \int d^3r \delta E(\mathbf{r})$$

$$\delta E(\mathbf{r}) = \sum_p \varepsilon_p \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}), \quad (18.6)$$

где энергия взаимодействия определяется равенством

$$f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{p}\mathbf{r}, \mathbf{p}'\mathbf{r}') \quad (18.7)$$

Т.о. энергия является локальной функцией распределения $\delta n_{\mathbf{p}}$. Во всех точках связь между ними оказывается одной и той же, как и для однородной системы. Ясно, что локальность энергии является следствием нашего предположения о малом радиусе взаимодействия.

18.1.3 Кинетическое уравнение для квазичастиц

В соответствии с (18.6) локальная энергия квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}$ равна

$$\tilde{\varepsilon}_p(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}) \quad (18.8)$$

Градиент $\nabla_{\mathbf{p}}\tilde{\varepsilon}$ определяет скорость квазичастицы, а $\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{\varepsilon}$ есть диффузионная сила, которая “толкает” квазичастицы в область минимальной энергии.

Следуя Ландау мы рассматриваем квазичастицы как независимые и описываемые классическим гамильтонианом $\varepsilon_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$. Т.о., мы сейчас начнем строить кин. теорию для газа квазичастиц. Как обычно в кин. теории рассмотрим малый элемент фазового пространства $d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{r}$ и вычислим поток квазичастиц через каждую сторону этого элемента объема.

Баланс входящих и выходящих потоков записывается так

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = 0 \quad (18.9)$$

Это полное кин. уравнение описывает движение квазичастиц во *всем фазовом пространстве* при отсутствии столкновений и внешних сил. Но мы знаем, что функция $n_{\mathbf{p}}$ определена только вблизи ПФ. Представление о независимых КЧ не может быть применимым при всех значениях импульса $\mathbf{p}$. Независимыми можно считать только возбужденные КЧ вблизи ПФ. Поэтому из Ур. (18.9) нужно выделить кин. уравнение, описывающее движение только возбужденных КЧ. Для этого запишем $n_{\mathbf{p}}$ в виде (18.4) и используем (18.8):

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^0 \cdot \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (18.10)$$

Здесь сложный 3й член этого линеаризованного кин. уравнения описывает только КЧ с импульсами вблизи ПФ, поскольку $\nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^0 = -\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)$. Первые два члена описывают движение независимых КЧ с импульсами $\mathbf{p}$ вблизи ПФ. Последний член вследствие взаимодействия имеет смысл потока КЧ, находящихся в основном состоянии и увдекаемых неоднородностями распределения возбуждений.

Итак, картина такова: элементарные возбуждения, число которых невелико, совершенно независимы. В однородных системах они не взаимодействуют с невозбужденными частицами. Однако, если распределение $\delta n_{\mathbf{p}}$ неоднородно, то возбужденные КЧ создают силовое поле, которое влияет на распределение системы в основном состоянии и разрушает его. Это есть эффект 1-го порядка по $\delta n_{\mathbf{p}}$. Пренебрежение взаимодействием двух возбужденных КЧ оправдано при низких температурах, когда их плотность мала. Однако, менее тривиальным является предположение о том, что взаимодействие между возбужденными и невозбужденными частицами можно заменить средней макроскопической силой. Иначе говоря, макроскопические корреляции казалось бы должны играть заметную роль, но согласно теории Ландай, они не имеют никакого значения. Такое предположение доказывают с помощью теории возмущений.

Линеаризованное кин.уравнение можно упростить используя наше любимое выражение для отклонения от локального равновесия $\delta\tilde{n}_{\mathbf{p}}$. Приведем еще раз

$$\delta\tilde{n}_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}} - \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} \sum_{p'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}$$

Из этого выражения и (18.10):

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta\tilde{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (18.11)$$

Проверьте: Этот результат можно также получить из (18.9) если записать $n_{\mathbf{p}}$ в виде отклонения локальной плотности, т.е.

$$n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = n^0(\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}}) + \delta\tilde{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t). \quad (18.12)$$

Кин. уравнение (18.12) содержит производную по времени от δn_p и производные по координатам от $\delta\tilde{n}_p$. Это различие связано с тем, что градиентные члены описывают диффузию КЧ, которая определяется локальной энергией. В это уравнение следует, как обычно, добавить еще члены с внешней силой и интегралом столкновений. Окончательно получим:

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta\tilde{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial n_p^0}{\partial \varepsilon_p} \right) = I(\delta n_p). \quad (18.13)$$

18.1.4 Нулевой звук в ферми-жидкости

Ранее мы получили скорость обычного звука в 3D Ферми жидкости

$$s^2 = (p_F^2 / 3m \cdot m^*)(1 + F_0^s).$$

По мере исчезновения взаимодействия $F_0^s \rightarrow 0$ и скорость звука приближается к $v_F / \sqrt{3}$.

Для распространения обычного звука в какой-либо среде необходимо установление локального равновесия, и следовательно, многократные столкновения между частицами составляющими эту среду. Затухание обычного звука оказывается обратно пропорциональным времени между столкновениями. С другой стороны, мы знаем, что для передачи сигнала на расстояние столкновения вообще-то не нужны. Передачу сигнала без столкновений (прямым пролетом) использует, например, мальчишка, бросающий мелкие камешки в окно приятелю. Если камешки во время пролета еще испытывали бы взаимодействие между собой, то возникло бы коллективное возбуждение в бесстолкновительной системе, известное как нулевой звук.

Коллективные моды представляют собой второй возможный тип элементарных возбуждений в ферми жидкости. Они описывают когерентное движение всей системы в целом. На любую квазичастицу действует поле окружающих ее частиц. В равновесии в однородных условиях средняя сила, действующая на частицу, равна нулю. Однако, если в результате какой-либо внутренней флуктуации в системе равновесие нарушится, то средняя силу не будет равна нулю. Она будет стремиться восстановить равновесное распределение, играя, таким образом роль возвращающей силы при коллективных колебаниях системы вблизи равновесного состояния. Иными словами, коллективные моды связаны с кооперативным движением в системе, которое определяется взаимодействием между всеми частицами.

Рассмотрим движение системы ферми-частиц в собственном самосогласованном поле. Будем предполагать, что ферми-жидкость находится в основном состоянии и рассмотрим бесстолкновительный режим.

$$\omega \gg \nu,$$

где ν - частота столкновений. Кинетическое уравнение имеет вид (18.10)

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^0 \cdot \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

18.1.5 Качественная структура неоднородного возбуждения

Пусть к системе находящейся в основном состоянии добавлена квазичастица с импульсом $\mathbf{p}_0$. Если эта квазичастица размазана по всей системе, то состояние системы остается однородным и отсутствуют силы, стремящиеся возбудить другие КЧ. Если добавленная КЧ локализована, то локальная энергия $\tilde{\varepsilon}_p$ других квазичастиц изменяется в пространстве. Это приводит к появлению сил, которые стремятся возбудить другие КЧ. Чтобы построить локализованный волновой пакет, соответствующий КЧ $\mathbf{p}_0$, нужно найти равновесное распределение других частиц вокруг нее.

Рассмотрим отклонение функции распределения, которое периодически в пространстве и времени и характеризуется волновым вектором $\mathbf{q}$ и частотой ω :

$$\delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (18.14)$$

Свободный поток КЧ описывается кин уравнением (18.11), которое для возбуждений типа плоских волн можно записать в виде

$$-\omega \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta \tilde{n}_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad (18.15)$$

Мы изучаем движение КЧ в промежутке между столкновениями за время малое по сравнению с τ . Поэтому столкновения вообще можно не учитывать. Заменим отклонение $\delta \tilde{n}_{\mathbf{p}}$ его выражением (??). Напомним его:

$$\delta \tilde{n}_{\mathbf{p}} = \delta n_p - \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}.$$

Тогда (18.15) становится интегральным уравнением для δn_p :

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) \delta n_p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \left(\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon_p} \right) \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} = 0 \quad (18.16)$$

Это уравнение имеет решение только для определенных значений ω . Эти решения описывают элементарные возбуждения с волновым вектором $\mathbf{q}$. Данное уравнение общее, оно применимо к “одетым” КЧ, а также к коллективным модам.

Рассмотрим возбуждение типа (18.14), которое связано с дополнительной КЧ с импульсом $\mathbf{p}_0$. Соответствующая функция распределения есть

$$\delta n_p = \delta_{p, p_0}$$

Но такое состояние не является реальным возбуждением в системе. Соответствующее возмущение поляризует среду, в результате голая квазичастица одевается индуцированным поляризационным облаком из других квазичастиц. Продолжая рассмотрение можно получить решения - индивидуальные колебания квазичастиц. Но наша задача, в первую очередь, найти коллективные моды. Коллективные колебания - это свободные колебания жидкости и характеризуются отличной от нуля флуктуацией $\delta n_p(\mathbf{q}, \omega)$ функции распределения. При малых $\mathbf{q}$ и ω структура коллективных мод определяется однородным кин. уравнением (18.16). Коллективные решения ур. (18.16) отличаются от индивидуальных возбуждений. В случае индив. возбуждений одна компонента, напр. $\mathbf{p}_0$, вызывает движение всех других частиц. Источником возбуждения является одна КЧ. Она окружена поляризационным облаком. В коллективной моде все частицы играют одинаковую роль.

Рассматриваем коллективные моды. Будем предполагать, что возмущение δn_p является гладкой функцией, определенной на всей ПФ. Такие гладкие решения кин. уравнения (18.16) соответствуют только определенным дискретным собственным значениям. Уравнение (18.16) зависит только от отношения q/ω . Т.о. собственные значения пропорциональны q , так что коллективные моды имеют определенную фазовую скорость. При $T = 0$ коллективные моды связаны исключительно с колебаниями самой ПФ.

Будем предполагать, что мы имеем дело с изотропной системой. Будем характеризовать моду не функцией распределения $\delta n_{\mathbf{p}}$, а введем смещение ферми-поверхности в точке $\mathbf{p}$ по нормали на величину $\mathbf{u}_{\mathbf{p}}$. Оно приведет к изменению числа квазичастиц

$$\delta n_p = \delta(\varepsilon_p - \mu) v_F u_p \quad (18.17)$$

Для величины $\mathbf{u}_{\mathbf{p}}$ кин уравнение (18.16) принимает вид

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \omega) u_{\mathbf{p}} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta(\varepsilon_{p'} - \mu) u_{\mathbf{p}'} = 0 \quad (18.18)$$

Введем полярные координаты (θ, φ) с осью $\mathbf{q}$ и проекцию спина σ . Смещение в направлении (θ, φ) ПФ (соответствующей спину σ) является функцией $u(\theta, \varphi, \sigma)$, а кинетическое уравнение принимает вид:

$$(\cos \theta - \lambda)u(\theta, \varphi, \sigma) + \frac{\cos \theta}{8\pi} \sum_{\sigma} \int d\Omega F(\xi, \sigma, \sigma') u(\theta', \varphi', \sigma') = 0, \quad (18.19)$$

где ξ - угол между направлениями (θ, φ) и θ', φ' . Безразмерная величина

$$\lambda = \frac{\omega}{qv_F} \quad (18.20)$$

есть отношение фазовой скорости волны к скорости на поверхности Ферми. Коэффициент 8π получен как произведение 4π (соответствующих пространственному углу) и 2 (соответствующей двум направлениям спина). Собственные значения ур. (18.19) соответствуют дискретным значениям λ . Коллективные моды, в которых спины колеблются в фазе, не связаны с модами, в которых спины движутся не в фазе. Представим смещение как

$$u(\theta, \varphi, \pm) = u^s(\theta, \varphi) \pm u^a(\theta, \varphi) \quad (18.21)$$

где u^s и u^a - симметричная и антисимметричная по спину амплитуды колебаний. Эти амплитуды удовлетворяют независимым уравнениям

$$(\cos \theta - \lambda)u^{s,a}(\theta, \varphi) + \frac{\cos \theta}{4\pi} \int d\Omega F^{s,a}(\xi) u^{s,a}(\theta', \varphi') = 0, \quad (18.22)$$

Формальное решение ур. (18.22) можно получить, разложив u в ряды по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Индекс m является хорошим квантовым числом, т.к. различные значения m независимы. Поэтому можно классифицировать решения так: продольные ($m = 0$), поперечные ($m = 1$), квадрупольные ($m = 2$) и т.д. В отличие от m , различные значения l в ур. (18.22) связаны. В результате, коллективной моде соответствует единственное значение m и набор значений l .

Среди коллективных мод наиболее важная — продольная симметричная мода (т.е. соответствующая u^s): это единственная мода, описывающая флуктуации плотности. Она есть высокочастотный ($\omega \gg 1/\tau$) аналог обычного звука. Ландау назвал ее нулевым звуком. Другой важной модой является продольная антисимметричная мода, которая описывает флуктуации спиновой плотности.

18.1.6 Простая модель нулевого звука

Предположим, что взаимодействие $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ постоянно, т.е. не зависит от $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Тогда отличная от нуля только одна компонента — F_0^s . Обозначим ее F_0 . Ур. (18.22) имеет единственное решение — нулевой звук.

$$u(\theta, \varphi) = C \frac{\cos \theta}{\lambda - \cos \theta}, \quad (18.23)$$

где C — некая константа. Уравнение (18.23) описывает смещение ПФ вследствие колебаний. Спектр нулевого звука получаем подставляя (18.23) в (18.22) и выполняя интегрирование по углам. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\lambda}{2} \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} - 1 = \frac{1}{F_0} \quad (18.24)$$

Зная решение этого уравнения $\lambda = \lambda_0$ можно найти скорость нулевого звука.

- Если $F_0 > 0$ (отталкивание между квазичастицами), то есть только 1 действительный корень $\lambda > 1$. В этом случае имеется незатухающая нуль-звуковая мода. Ее фазовая скорость больше скорости частицы v_F на ПФ.
- Если между частицами есть слабое притяжение,

$$-1 < F_0 < 0,$$

то корень уравнения (18.24) будет комплексным. В этом случае решением будут затухающие нуль-звуковые колебания.

- Если притяжение между КЧ велико

$$F_0 < -1$$

то нуль-звуковая мода неустойчива.

Уравнение (18.24) легко решить в предельных случаях сильного и слабого отталкивания между КЧ.

1. Связь очень велика ($F_0 \gg 1$), тогда левую часть уравнения можно разложить по $1/\lambda$ и получить $\lambda \sim \sqrt{F_0/3}$, а движение ПФ сводится к сдвигу вдоль $\mathbf{q}$ всей ПФ как целого.
2. В пределе слабой связи ($F_0 \ll 1$) величина $\lambda \rightarrow 1$ и смещение u сводится к малой выпуклости на ПФ в направлении $\mathbf{q}$. Коллективная мода захватывает только малое число КЧ и распространяется практически с их скоростью.

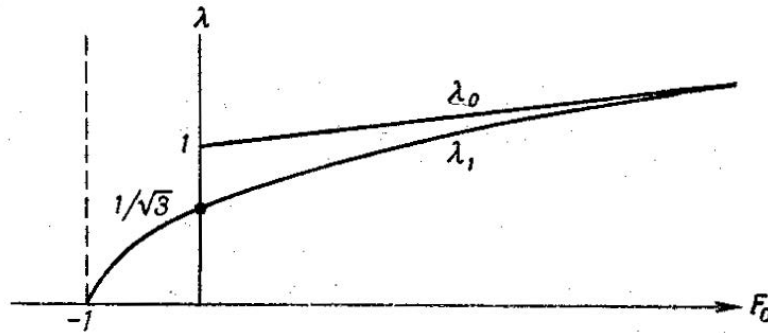


Рис. 18.1: Зависимость приведенных скоростей первого и нулевого звука от величины взаимодействия

Итак, при распространении нулевого звука поверхность Ферми в ферми-жидкости деформируется и приобретает вид эллипсоида, вытянутого в направлении распространения волны

История. Take-home-message

Это интересное явление Ландау предсказал в 1957г. В жидком He^3 , как и в любой жидкости и газе, обыкновенный звук может распространяться лишь при условии

$$\lambda \gg l \quad (1)$$

где λ — длина волны звука, l — длина свободного пробега частиц жидкости. При таких условиях скорость распространения звука связана со сжимаемостью жидкости обычной формулой

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (2)$$

Особенность ферми-жидкости состоит в том, что в ней длина свободного пробега элементарных возбуждений возрастает с

понижением температуры по закону

$$l \propto \frac{1}{T^2} \quad (3)$$

Поэтому для любой длины волны λ при достаточно низких температурах условие (1) перестает выполняться. Это приводит к затуханию обычного звука и к невозможности его распространения. При абсолютном нуле температур, когда столкновения отсутствуют, обычный звук в ферми-жидкости вообще не может распространяться. Ландау установил, однако, что при определенном характере взаимодействия между элементарными возбуждениями в ферми-жидкости могут распространяться колебания другого рода — нулевой звук. Этот звук распространяется при достаточно низких температурах. Частота и волновой вектор нулевого звука связаны обычным соотношением

$$\omega = c_0 k$$

где скорость c_0 не зависит от k . При этом c_0 уже не определяется простой формулой (2). Величина c_0 зависит от взаимодействия между элементарными возбуждениями в жидкости. Ее можно вычислить, исходя из экспериментальных данных по теплоемкости и сжимаемости жидкости. Расчеты показывают, что в жидком He^3 отличие скоростей обычного и нулевого звука

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{c_0 - c}{c} \approx 0.032.$$

Т.о., общая картина распространения звука в He^3 такова. При достаточно высоких температурах в жидкости распространяется обычный звук. Его затухание пропорционально ω^2/T^2 и возрастает при понижении температуры. При температурах

настолько низких, что $\lambda \sim l$, затухание делается весьма большим, так что распространение звука фактически невозможно. При дальнейшем понижении температуры мы попадаем в область нулевого звука. Затухание звука вновь уменьшается, а скорость его меняется на величину Δc . Затухание нулевого звука пропорционально Δc^2 и не зависит от частоты. Все описанные особенности распространения были обнаружены экспериментально в работе [7]. Результаты не оставляют сомнений в том, что теория ферми-жидкости находится в прекрасном количественном согласии с опытом.

Для того чтобы лучше понять разницу между обычным и нулевым звуком, полезно рассмотреть, каким образом меняется при распространении звука распределение по импульсам элементарных возбуждений в жидкости. В равновесии элементарные возбуждения в ферми-жидкости, подобно электронам в металле, заполняют в импульсном пространстве фермиевскую сферу, радиус которой ρ_0 определяется плотностью жидкости. При распространении обычного звука в каждой точке жидкости существует термодинамическое равновесие. Плотность жидкости, однако, изменена, и все частицы движутся как целое с некоторой скоростью. Поэтому распределение частиц по импульсам можно изобразить ферми-сферой измененного радиуса, сдвинутой в импульсном пространстве на некоторое расстояние. В нулевом звуке картина гораздо сложнее. Термодинамическое равновесие не успевает установиться, ферми-поверхность перестает быть сферой. Она сложным образом деформируется, вытягиваясь в направлении распространения звука. Деформация ферми-сферы при распространении обычного и нулевого звука показана схематически на рисунке.

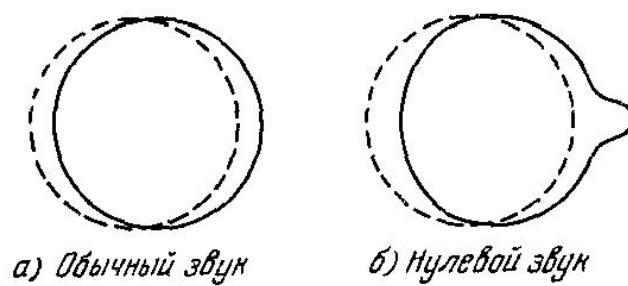


Рис. 18.2: Два типа деформации ПФ при коллективных фозбуждениях

Литература

- [1] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **32**, 59 (1957).
- [2] Д. Пайнз, Ф. Нозьер, Теория квантовых жидкостей, М., Мир, 1967
- [3] А.А. Абрикосов, Основы теории металлов, М., Наука, 1987
- [4] G.S. Ukgig, Correlated Fermionic Systems: Fermi Liquid and Luttinger Liquid, Tohoku University, Sendai, Japan (2004)
- [5] W. Kohn, J. Luttinger, Phys. Rev. Lett., **15**, 524 (1956)
- [6] Силин В.П. ЖЭТФ 33, 495 (1957).
- [7] W. R. Abel. A. C. Anderson, W. C. B l a c k, J. C. W h c a t l e y, Thermal and Magnetic Properties of Liquid He3 at Low Pressure and at Very Low Temperatures, Physics **1**, 337 (1965). УФН **91**, 261 (1967).