

Глава 6

Квантовый баллистический транспорт в магнитном поле 1. Квантовый эффект Холла

6.1 План

- Квантование Ландау в сильном магнитном поле
- Краевые состояния и квантовый эффект Холла в баллистической картине

6.2 Квантование Ландау в сильном магнитном поле

Хорошо известно, что в магнитном поле траектория движения заряженной частицы (электрона) искривляется вследствие силы Лоренца. Результирующая орбита является окружностью в плоскости перпендикулярной магнитному полю. Радиус орбиты зависит от скорости частицы и величины поля. Циклотронная частота $\omega_c = eB/mc$. Заметим, что циклотронная частота не зависит от скорости, так что в однородном поле все

электроны вращаются с одной частотой. Эта абсолютно классическая картина искривления траекторий приводит к классическим последствиям, таким как магнитная фокусировка, образование скачущих орбит вдоль поверхности (хотя, если копнуть глубже, то выяснится квантовое содержание и этих, казалось бы, простых эффектов).

Но, поскольку в магнитном поле движение электронов становится финитным, возникают также и квантовые последствия. Одно из них связано с тем, что в магнитном поле канонический импульс p модифицируется вектор-потенциалом $p + (e/c)A$, связанным с полем B . Это приводит к сугубо квантовому явлению – подавлению слабой локализации. Физическая причина этого состоит в том, что приложение перпендикулярного поля нарушает симметрию обращения времени и переводит систему в другой класс симметрии - ортогональный. Кроме того, поле приводит к квантованию электронных орбит, и возникновению полностью дискретного спектра электронов.

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \hbar\bar{k} = m\bar{v} + (e/c)\bar{A} \\ \bar{B} &= \text{rot}\bar{A}\end{aligned}\quad (6.1)$$

Здесь квантовая физика проглядывает в появлении постоянной Планка. В этой главе магнитное поле будет всегда перпендикулярно плоскости 2DEG, поскольку как мы предположим, оно связывается только с орбитальным движением в перпендикулярной плоскости. Предположим также, что система является идеальной, рассеяние отсутствует. Гамильтониан системы

$$H = \frac{(P + \frac{e}{c}A)^2}{2m} + U(x, y), \quad (6.2)$$

где P - оператор импульса, $U(x, y)$ - электростатический потенциал, в котором движутся электроны.

Рассмотрим вначале однородную неограниченную 2D систему, так что $U(x, y) = 0$ везде. В результате, как мы знаем, возникают решения и собственные значения энергии электронов

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \quad (6.3)$$

где удивительным образом возникает знакомая нам та же самая циклотронная частота ω_c , что и в классической электродинамике, однако квантовый номер уровня Ландау $n = 1, 2, \dots$ отличает это решение от классического случая. Т.о., непрерывный континуум плотности состояний при $B = 0$ преобразовался в дискретную плотность состояний (DOS). Заметьте, что теперь много электронов занимают состояние с одной и той же энергией, т.е. уровень сильно вырожден. Казалось бы, мы имеем проблему для фермионов, с точки зрения принципа Паули, который запрещает фермионам занимать одно и то же квантовое состояние. Однако, электроны занимают разные места в пространстве и, т.о., состояние характеризуется не только номером уровня, но и положением на плоскости $\{x, y\}$.

Оценим кратность вырождения одного уровня энергии. В учебнике Ландау это сделано более строго, но мы для простоты воспользуемся простым требованием равенства полного числа частиц в магнитном поле и без поля. Кроме того, магнитное поле работу не совершает, поэтому уровень Ферми в системе после введения поля не должен измениться. Тогда все состояния, которые находились в интервале энергии от одного уровня Ландау до соседнего, должны сконденсироваться на один и тот же уровень Ландау. Иначе говоря, все состояния в интервале энергии $0 \div \hbar\omega_c$ сконденсируются на первый уровень, все состояния в интервале $\hbar\omega_c \div 2\hbar\omega_c$ сконденсируются на второй уровень и т.д. Число состояний на единичный интервал

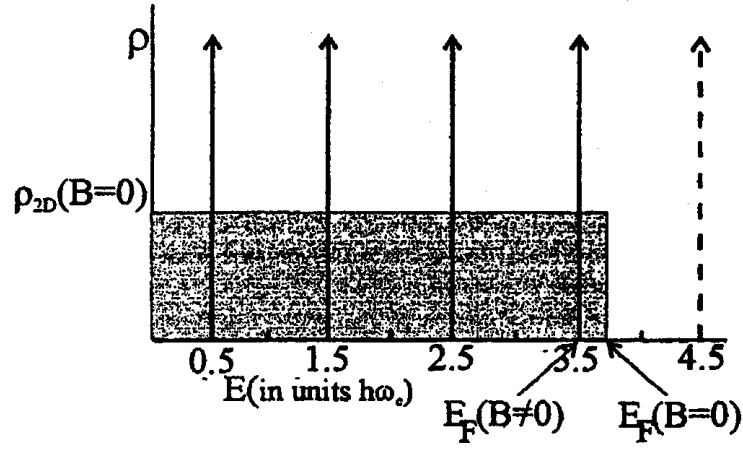


Рис. 6.1: Плотность состояний $\rho(E)$ в нулевом и в сильном магнитном поле

энергии в 2D системе мы уже вычисляли

$$N_{2D}(B=0) = \rho_{2D}(B=0) \times S = g_s \frac{m_b}{2\pi\hbar^2} \times S, \quad (6.4)$$

где $g_s = 2$ учитывает спиновое вырождение; мы пока забываем про Зеемановское расщепление уровней, т.е. пока положим g -фактор $g = 0$). Т.о., полное число состояний, которое может разместиться на одном уровне Ландау в пределах площади S

$$N_n = N_{2D}(B=0)\hbar\omega_c = g_s \frac{m_b}{2\pi\hbar^2} \hbar\omega_c S = g_s \frac{e}{\hbar c} BS = g_s \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (6.5)$$

где $\Phi_0 = hc/e$.

Т.о., для 2D системы с единичной площадью число состояний на уровне Ландау, или кратность вырождения уровня равна Φ/Φ_0 . Если имеется 2D система с заданной концентрацией электронов n , то общепринято использовать коэффициент заполнения уровней Ландау ν как отношение числа электронов

к числу мест (числу квантов потока). Полезно помнить это количественное соотношение для заданного магнитного поля B :

$$\nu = \frac{n}{n_\Phi} = \frac{n\Phi_0}{B} = \frac{\hbar c}{eB} \approx 2.418 \times 10^{10} B \quad \text{на } 1 \text{ см}^2, \quad (6.6)$$

где поле B в Теслах.

Нетрудно видеть, что кратность вырождения точно равна числу электронов, которое получается чисто геометрически, если мы каждой паре электронов (с разным спином) отведем площадь равную πl^2 , где магнитная длина $l = (\hbar/eB)^{1/2}$ в системе Si, или $l = (\hbar c/eB)^{1/2}$ в Гауссовой системе. Таким образом электроны исполняют запрет Паули. Другими словами, электроны так заполняют уровень Ландау, чтобы на каждый из них приходилось по πl^2 жилплощади. Можно убедиться в том, что попытка подселения лишнего электрона на уровень Ландау связана с избыточной энергией точно равной $\hbar\omega_c$. Иначе говоря, им нет смысла уплотняться.

Q:

Как же это равенство жилплощади совместить с классическим представлением? На вышележащих уровнях Ландау кинетическая энергия выше, чем на нижележащих. Поэтому и циклотронный радиус казалось должен быть больше, однако площадь, занимаемая состояниями на разных уровнях Ландау одна и та же.

A:

Из решения Гамильтониана нужно найти не только уровни энергии, но и собственные волновые функции. Из них видно, что состояния с более высоким номером уровня имеют все

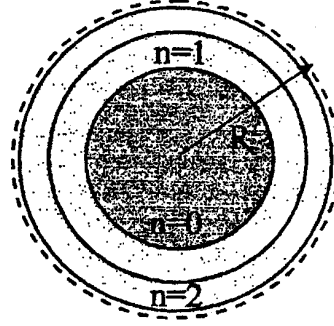


Рис. 6.2: Площади, занимаемые в реальном пространстве электронными состояниями в 2D системе в сильном поле. Площади для каждого диска (или кольца) равны, поскольку каждое состояние окружает один квант потока Φ_0 , но циклотронные радиусы разные

больший радиус на плоскости, однако все более пустую середину – см. Рисунки 6.2 и 6.3.

Если N_{\max} – это номер самого верхнего занятого уровня Ландау, то нетрудно получить соотношение между магнитной длиной и классическим циклотронным радиусом $R_{c,N_{\max}} = mv_{N_{\max}}/eB$, приравнявая кинетические энергии

$$\frac{1}{2}mv_{N_{\max}}^2 = \left(N_{\max} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c = \left(N_{\max} + \frac{1}{2}\right)\frac{\hbar eB}{mc} \quad (6.7)$$

$$R_{c,N_{\max}} = \sqrt{\frac{(2N_{\max} + 1)\hbar c}{eB}} = l_B\sqrt{(2N_{\max} + 1)} \quad (6.8)$$

Рисунок 6.3 поясняет как соотносятся площади, занимаемые состояниями в реальном пространстве, и форма волновых функ-

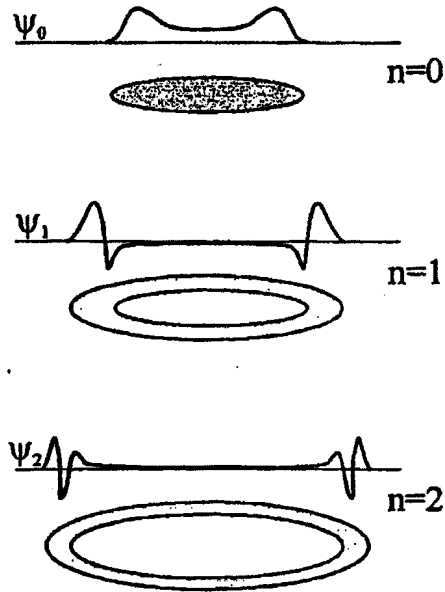


Рис. 6.3: Форма волновых функций электронов на разных уровнях Ландау. Заметьте, что на нулевом уровне $\psi_0^2 \neq 0$ в центре диска, а на следующих уровнях $\psi_i^2 = 0$ в центре диска. Таким образом электроны стремятся избежать соседства

ций для разных уровней Ландау. Поскольку состояния на разных уровнях Ландау избегают друг друга, то требование ортогональности их волновых функций выполняется.

Чтобы учесть спин электрона, помимо удвоения кратности вырождения, надо также в выражение для энергии уровней ввести Зеемановскую энергию $g\mu_B B$:

$$E_n(B) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{eB}{m_b c} \pm \frac{1}{2} g \frac{eB}{m_0} \quad (6.9)$$

Замечания

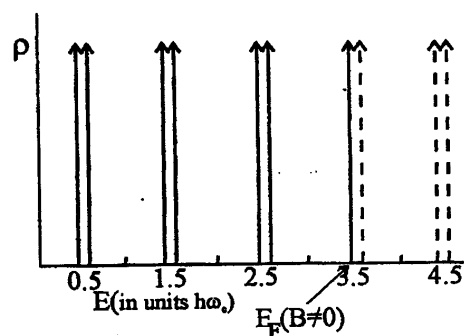


Рис. 6.4: Энергетический спектр электронов в 2DEG в сильном магнитном поле, с учетом спинового расщепления

- **О массе**

Отметим, что в выражение для орбитальной энергии входит зонная масса, а для Зеемановской энергии - масса свободного электрона. g -фактор = 2 для свободного электрона, однако в полупроводниках он может сильно отличаться от этого значения не только по величине, но даже и по знаку, и также зависеть от магнитного поля. Рисунок 6.4 поясняет вид плотности состояний для электронов с ненулевым Зеемановским расщеплением.

- **О Фермиевской энергии (или электрохимическом потенциале) для электронов в магнитном поле.**

По определению энергия Ферми - это энергия, которая требуется чтобы добавить $N + 1$ -й электрон к уже имеющимся N электронам. В то время как при $B = 0$ энергия Ферми определялась как граничная энергия в непрерывном спектре, то при $B \neq 0$ энергия Ферми может лежать только на уровнях Ландау (а не между ними) и потому

должна зависеть от магнитного поля. Даже если рассмотреть не бесконечно-узкие, а уширенные уровни Ландау в реальной системе с беспорядком, зависимость энергии Ферми от поля не исчезнет.

Q: Как же так может быть, ведь магнитное поле работы не совершает?

A:

Надо рассмотреть полную систему - двумерная система электронов + конденсатор, который с помощью электрического поля задает плотность электронов. В случае, когда в системе имеется электрическое поле, постоянным будет не хим. потенциал, а электрохим. потенциал. В частности, если плотность электронов поддерживается постоянным напряжением на затворе (подключена батарейка), то при изменении магнитного поля и изменении хим. потенциала, возникнет ток перезарядки конденсатора, так, что плотность электронов будет слегка меняться так, чтобы электрохим. потенциал оставался постоянным.

6.3 Краевые состояния и квантовый эффект Холла

Физическая основа этого параграфа - картина электронов скачущих вдоль краев образца - см. Рис 6.5.

Эта картина имеет классические и квантовые следствия. Основа классических следствий - зеркальное отражение. Основа квантовых следствий - (1) квантование заметаемой площади в магнитном поле и (2) квантование проводимости в одномерном канале вдоль стенки.

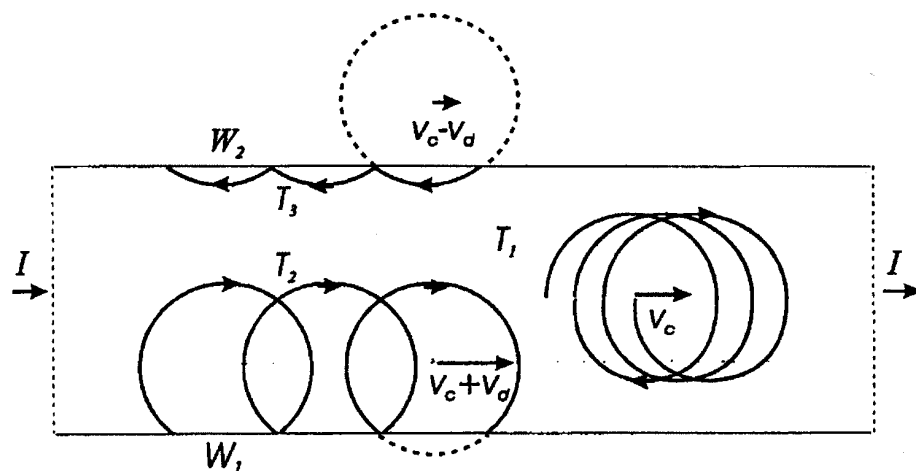


Рис. 6.5: Электроны, движущиеся в магнитном поле в двумерном канале и между его двумя зеркально отражающими берегами -стенками W_1 и W_2 . Магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка. Центральная траектория T_1 - обычная объемная циклоида, возникающая как сумма дрейфа в электрическом поле вдоль канала со скоростью v и циклотронного движения в магнитном поле. Траектории T_2 при стенке W_1 и T_3 при стенке W_2 распространяются вдоль стенок. Это т.н. “скачущие орбиты” - классический или квазиклассический аналог квантовых краевых токов

До сих пор предполагалось, что электростатический потенциал постоянен по площади канала, так что выбором начала отсчета мы сделали $U(r) = 0$. Это эквивалентно рассмотрению бесконечной системы без берегов. Как на квантование Ландау повлияет введение стенок на краях? Рисунок 6.6 поясняет это. Рассмотрим стенки с конечной производной dU/dy . Поскольку плотность электронов в канале отлична от нуля, так же ненулевая и энергия Ферми. Снаружи канала и то и другое равны 0. Значит появляется зависимость энергии Ферми от y .

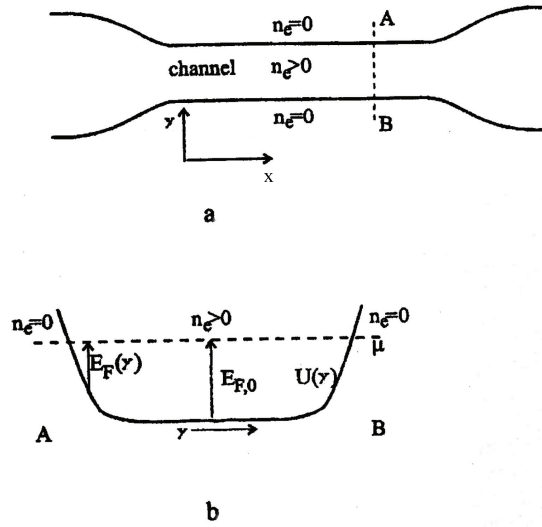


Рис. 6.6: Канал конечной ширины в 2D электронной системе. На панели а)- канал в реальном пространстве. Электроны зажаты размерами канала в направлении x и свободно распространяются по y . Вне канала плотность электронов равна 0. На панели б) изображено поперечное сечение распределения энергии в направлении x . Пунктир - электрохимический потенциал μ , который постоянен во всей системе. Отметим непостоянство плотности электронов и энергии Ферми по x

Ясно, что при получении зависимости $E_F(y)$ мы должны поддерживать постоянным электрохимический потенциал μ ; его постоянство является условием термодинамического равновесия в 2D системе свободно движущихся частиц. Поскольку электрохимический потенциал есть сумма кинетической и потенциальной энергии, то $\mu = E_F + U(y) = Const$, а канал - это просто удерживающая электроны зависимость $U(y)$.

Теперь включим магнитное поле и забудем пока про спин. Образуются уровни Ландау, с их квантованной **кинетиче-**

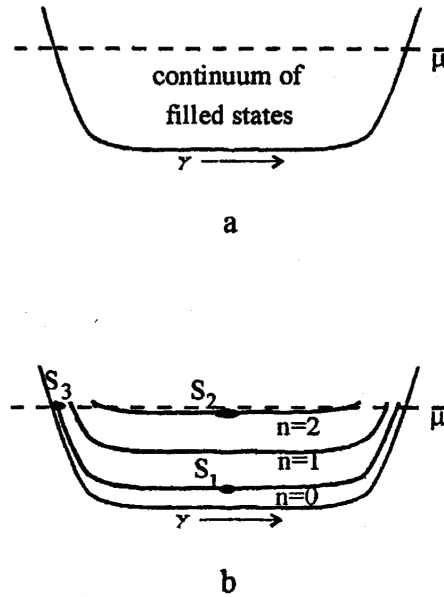


Рис. 6.7: Электронные состояния в канале. а) для $B = 0$, б) в сильном перпендикулярном поле

ской энергией. Для полной энергии данного состояния на данном уровне Ландау можно записать

$$E_n(y) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + U(y) \quad (6.10)$$

Зависимость энергии уровней от y , даваемая уравнением 6.10 изображена на рис. 6.7.

Электроны на низших уровнях Ландау сидят в середине канала, занимают по y размер порядка $2l_B$ и находятся практически в постоянном потенциале. С ними ничего интересного не происходит. Наиболее интересна ситуация с состояниями на краях. Здесь электростатический потенциал быстро нарастает при приближении к краям. Градиент потенциала порождает

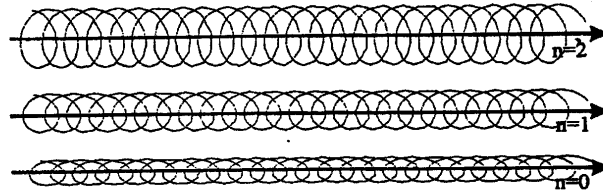


Рис. 6.8: Схематическое изображение классических траекторий электронов, находящихся на различных уровнях

ет электрическое поле $\bar{E} = -\nabla U(y)$. С классической точки зрения электрическое поле вызывает дрейф с дрейфовой скоростью

$$v_{d,n,x}(y) = -\frac{|\bar{E}|}{|\bar{B}|}. \quad (6.11)$$

Для простоты я считал электрическое и магнитное поле перпендикулярными друг другу. Из векторного соотношения ясно, что этот дрейф электронов будет направлен перпендикулярно потенциальной стенке и вызовет дрейфовый ток вдоль канала (по x). Это краевой ток. Этот ток есть квантовый аналог классического тока электронов, скачущих вдоль зеркальной стенки. Дрейфовая скорость электронов дает дрейфовый волновой вектор $k_{n,x} = mv_{d,n,x}/\hbar$ в направлении x

Q: Положим типичное электрическое поле на краю 10^4В/см и поле $B = 2\text{T}$. Оцените последний член в 6.10. Пусть будет $m = 0.05m_e$.

Из рисунка ясно, что направление скорости и волнового

вектора противоположны на двух противоположных краях канала. Если наш образец имеет круговую форму, то возникает круговой ток! Но пока пусть образец будет длинным прямоугольником с длинной стороной вдоль x . Состояние S_z привязано к краям. В полный ток дают вклад только электроны на уровне электрохимического потенциала. Их движение с классической точки зрения поясняется рисунком 6.8.

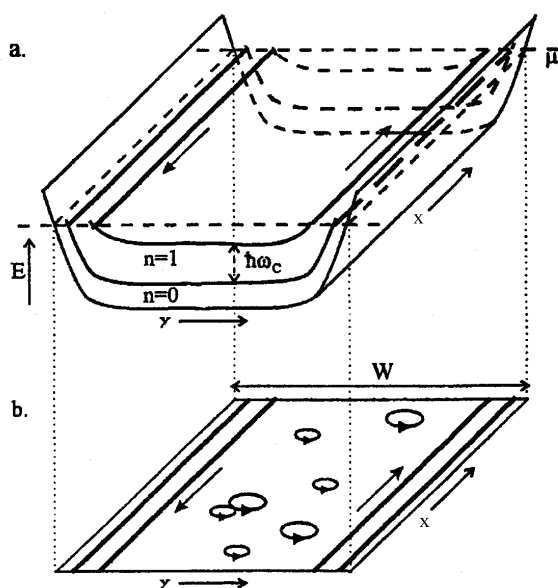


Рис. 6.9: Схематическое изображение энергии уровней в 2D объеме и краевых состояний на уровне Ферми. (a) пространственное изображение, (b) вид в плане. Стрелками показано направление движения в магнитном поле. Кружками изображены траектории локализованных состояний в 2D объеме.

Теперь обсудим как влияет на проводимость системы тот факт, что в 1D системе в сильном магнитном поле результирующий ток обеспечивается краевыми состояниями.

Рисунок 6.10 показывает как краевые состояния, распространяющиеся вдоль образца, соединяют его два конца с контактами или резервуарами, имеющими электростатические потенциалы μ_1 и μ_2 . Мы предполагаем, что $\mu_1 > \mu_2$ и введем $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$. Левый резервуар 1 эмиттирует электроны в систему. Очевидно, что эти электроны могут занимать только краевые состояния. Важно, что эмиттированные электроны могут распространяться только вдоль одного края образца от контакта 1 до 2. Т.о., только на одном берегу канала краевые состояния будут заполнены вплоть до химпотенциала μ_1 . Аналогично этому, на другой стороне канала краевые состояния будут заняты электронами, эмиттированными из контакта 2 и т.о. эти состояния будут заполнены вплоть до μ_2 . Снова магнитное поле разрушает симметрию обращения времени. В отсутствие поля все состояния могут быть заняты электронами, путешествующими в обоих направлениях.

Q: Если бы мы смогли бесконтактно измерить холловское напряжение, то какой результат мы бы получили в данном эксперименте?

Рисунок 6.10 показывает $E(y)$ в поперечном сечении 2DEG. Для простоты, предположено, что в центре канала заполнены два уровня Ландау и т.о. будут существовать два краевых состояния. Для каждого краевого состояния можно записать ток и проинтегрировать его по всему интервалу энергии для получения суммарного тока:

$$J_{net,n} = -e \int_{\mu_2}^{\mu_1} v_n(E) \rho(E) dE. \quad (6.12)$$

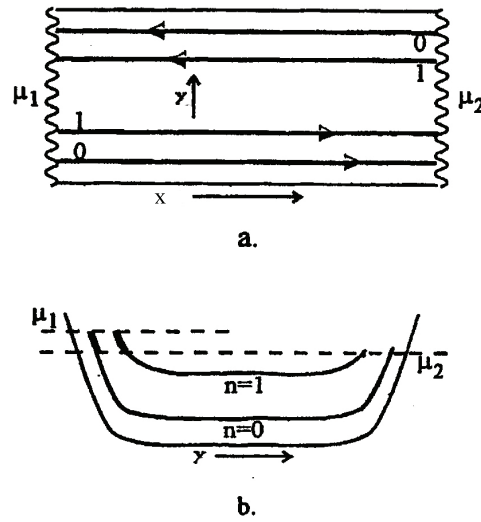


Рис. 6.10: Краевые состояния. а) схематическое изображение системы с двумя контактами на концах. Контакты имеют электрохимические потенциалы μ_1 и μ_2 , соответственно. $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 > 0$. б) Разность в заполнении состояний на одном конце по сравнению с другим. Заметим, что весь результирующий ток переносится краевыми состояниями и в интервале энергии $\Delta\mu$. Заметьте: y -координата поперек канала, а x - вдоль.

Заметим, что весь ток, текущий из контакта 1 в контакт 2 при энергии меньше μ_2 , будет компенсироваться таким же током, текущим из контакта 2 в контакт 1., и т.о. не даст вклада в полный ток.

Теперь вспомним, что краевые состояния являются одномерными. Для 1D имеется замечательное свойство (было рассмотрено ранее) что групповая скорость и плотность состояний каждая являются функциями энергии, но в их произведе-

нии энергия сокращается. Действительно,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\hbar} \frac{dE_n(k)}{dk} \\ \rho_{1D,n}(E) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dE_n(k)}{dk} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

так что

$$v_n(E) \rho_{1D,n} = \frac{1}{h} \quad (6.14)$$

Применяя этот результат мы получаем из (6.12) результирующий ток, переносимый одним краевым состоянием.

$$J_{\text{net},n} = -eg_s \frac{1}{h} \Delta\mu = g_s \frac{e^2}{h} V_{\text{bias}} \quad (6.15)$$

где $V_{\text{bias}} = \Delta\mu/e$.

Это ток на одно краевое состояние (один краевой канал). Для вычисления полного тока надо это выражение умножить на число краевых каналов или число заполненных уровней Ландау, N_{max} . Соответственно, проводимость равна

$$G = \frac{J_{\text{net}}}{V_{\text{bias}}} = \frac{\sum_{n=0}^{N_{\text{max}}-1} J_{\text{net},n}}{V_{\text{bias}}} = N_{\text{max}} \frac{g_s e^2}{h}. \quad (6.16)$$

Мы опять получили квантование проводимости, аналогично случаю $B = 0$. Однако здесь N_{max} - это число краевых состояний в системе, в отличие от случая нулевого магнитного поля, где число краевых состояний определялось шириной канала.

Введем теперь дополнительные контакты в систему, для того чтобы изучать эффект Холла (рис. 6.11).

На рисунке специально изображена несимметричная (“кривая”) конфигурация холловских контактов, для того, чтобы

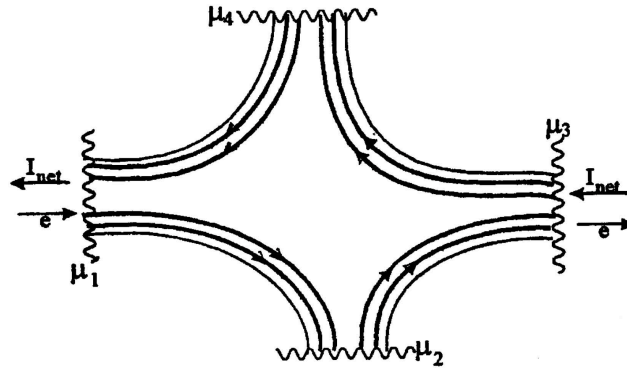


Рис. 6.11: Четырехконтактная конфигурация. На рисунке предположено, что заполнены два краевых состояния $N_{\max} = 2$.

продемонстрировать нечувствительность квантования проводимости к геометрии образца. Это является противоположностью обычному классическому эффекту Холла, где геометрия образца прямо входит в результат измерений.

Предположим, что результирующий разностный ток (net current) протекает между контактами 1 и 3 и холловское напряжение развивается между контактами 2 и 4. Предположим также, что $\mu_1 > \mu_3$. Все краевые состояния, заполненные в резервуаре (контакте) 1 до уровня μ_1 потекут по краевым состояниям и закончатся в контакте (резервуаре) 2. Полный ток текущий из 1 в 2 равен

$$J_{1 \rightarrow 2} = \mu_1 g_s \frac{e}{h} N \quad (6.17)$$

Важно отметить что полный обратный ток из резервуара 2 в 1 равен нулю, так как нет краевых состояний соединяющих резервуар 2 с резервуаром 1.

$$J_{2 \rightarrow 1} = 0 \quad (6.18)$$

Обобщая этот результат мы можем записать аналогичные соотношения

$$\begin{aligned} J_{i \rightarrow i+1} &= \mu_i g_s \frac{e}{h} N \\ J_{i+1 \rightarrow i} &= 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Теперь надо сделать различие между токовыми и потенциальными контактами. Например, контакт 2 - потенциальный и через него полный ток должен быть равен 0:

$$J_{1 \rightarrow 2} = J_{2 \rightarrow 3}. \quad (6.20)$$

Согласно (6.17) это условие означает

$$\mu_2 = \mu_1 \quad (6.21)$$

Продельвая то же самое для контактов 3 и 4, получаем

$$\mu_3 = \mu_4 \quad (6.22)$$

Рассмотрим теперь токовые контакты. В них надо соблюсти сохранение тока

$$I_{net} = -(J_{1 \rightarrow 2} - J_{4 \rightarrow 1}) \quad (6.23)$$

Используя соотношения между токами и разностью хим потенциалов между контактами получаем

$$I_{net} = -(\mu_1 - \mu_3) g_s \frac{e}{h} N = -(\mu_2 - \mu_4) g_s \frac{e}{h} N \equiv e V_{24} g_s \frac{e}{h} N \quad (6.24)$$

Т.о. холловская проводимость равна

$$G_H \equiv \frac{I_{net}}{V_{24}} = N g_s \frac{e^2}{h}. \quad (6.25)$$

- Рассеяние внутри краевых каналов (S_1) приводит к переходу электрона с одного на другое краевое состояние, но оставляет его на том же краю образца и не влияет на точность. В результате такого рассеяния электроны перераспределяются между краевыми состояниями.
- Рассеяния между краевыми каналами вблизи токовых контактов (S_2 и S_3) влияют как на полный ток, так и на разность потенциалов и потому не изменяют холловское сопротивление.
- Рассеяние типа S_4 - между краевыми каналами, вблизи потенциальных контактов - наиболее серьезно. Оно не влияет на полный ток, но влияет на ток втекающий в потенциальный контакт. Оно прямо приводит к отклонению холловского сопротивления от квантованного значения. Из рис. 6.12 видно что ρ_{xx} мало там где наблюдается плато. Малость ρ_{xx} означает малость диссипации и слабое рассеяние между краевыми каналами и в частности процессов таких как S_4 .

Q: почему рассеяние мало в режиме КЭХ, когда $\rho_{xx} \rightarrow 0$?

Второе замечание. Помимо целочисленного КЭХ открыт другой тип квантования - дробный квантовый эффект Холла при дробных значениях фактора заполнения $\nu = n_e(hc/eB)$ (D.C.Tsui et al., PRL **48**, 1559 (1982)). Этот эффект является коллективным и его нельзя объяснить в рамках нашего люби-

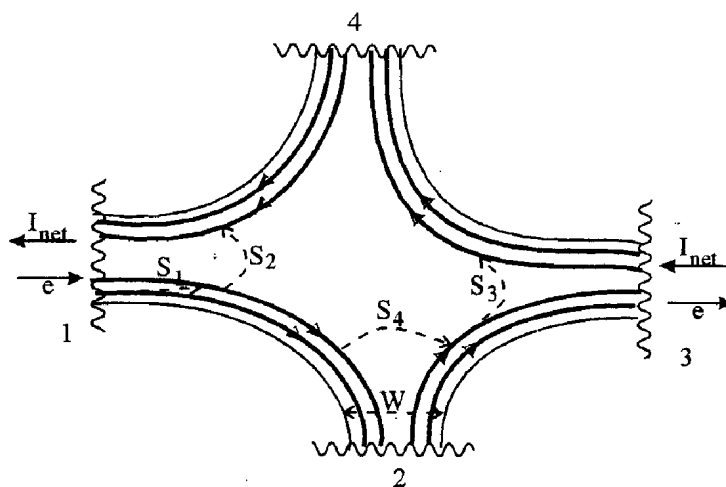


Рис. 6.13: Процессы рассеяния в режиме КЭХ. Отметим различие между процессами рассеяния внутри краевых каналов S_1 и между краевыми каналами - S_2 , S_3 и S_4 . В частности, процессы такие как S_4 позволяют электрону обойти холловский контакт параллельным путем и влияют на точность квантования холловской проводимости.

мого одноэлектронного приближения. Рисунок 6.12 показывает целый набор таких состояний с дробными значениями

$$\nu = \frac{p}{q} \quad (6.26)$$

Литература

- [1] Quantum Transport in Semiconductor Nanosystems, C.W.J.Beenakker and H. van Houten, in Solid State Physics, ed. H.Ehrenreich & D. Turnbull, Vol.144 (Academic Press, 1991).
- [2] Electric Transport in Mesoscopic Systems, S. Datta (Cambridge University Press, 1995).
- [3] Й. Имри, Введение в мезоскопическую физику, М. Физматлит, 2002.
- [4] J. Davies, The Physics of Low dimensional semiconductors, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [5] Т.Андо, А.Фоулер, Ф.Стерн, Электронные свойства двумерных систем. М. Мир, 1985. [Т. Ando, A.B. Fowler, F.Stern, Electronic properties of two-dimensional systems, Rev. Mod. Phys. 54, 437 (1982)].
- [6] В.Ф. Гантмахер, Электроны в неупорядоченных средах, Физматлит, 2003.
- [7] Т.Ando, Y.Arakawa K.Furuya, S.Komiyama, H.Nakashima, Mesoscopic Physics and Electronics, 2nd edition (Springer,2008).

- [8] Х.Л. Штёрмер, Нобелевская лекция по физике 1998, Дробный квантовый эффект Холла, Успехи физических наук, 2000, т. 170, с. 304;
- [9] С. Гирвин, Квантовый эффект Холла, пер. с англ., М.-Ижевск, 2003.
- [10] "Квантовый эффект Холла" под ред. Р.Пренджа и С.Гирвина, М., Мир, 1989.
- [11] К. фон Клитцинг, Квантованный эффект Холла (Нобелевская лекция), пер. с англ., Новое в жизни науки и техники, 1986, № 9, с. 3
- [12] Н.Б.Брандт, В.А.Кульбачинский, Квазичастицы в физике конденсированного состояния (М, Физматлит, 2007)
- [13] Fundamental Problems of Mesoscopic Physics. Interaction and Decoherence. Eds. I.V.Lerner, B.A.Altshuler, Y.Gefen, NATO Science Series (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004)
- [14] The Physics of Organic Superconductors and Conductors, A.L.Lebed, Ed., (Springer, Berlin, 2008)
- [15] X.-L.Qi, S.-C. Zhang, Topological insulators and superconductors, ArXiv: 1008.2026 (2010)
- [16] M. Koenig, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, X.-L. Qi, S.-C. Zhang, Quantum Spin Hall Insulator States in HgTe Quantum Wells, Science 318, 766 (2007). DOI: 10.1126/science.1148047