

# Глава 5

## Лекция 5. Баллистический транспорт

Экспериментальное открытие: В. J. van Wees, Н. van Houton, С. W. Beenakker et al. (1988) & D. Wharam, Т. J. Thornton, R. Newbury et al. (1988).

### 5.1 Формула Ландауэра (Landauer, 1957)

#### Одиночный проводящий канал

Рассмотрим систему, схематически изображенную на рисунке 5.1. Квантовая проволока (QW) подсоединена на обоих концах к идеальным подводным проводам, которые далее соединены с резервуарами электронов. Резервуары поглощают все входящие в них электроны, а также эмиттируют в подводные провода и QW электроны с энергией  $< \mu_1, \mu_2$ . Обозначим:

$T, R$  - коэффициенты прохождения и отражения, соответственно,  $T + R = 1$ ;

$v$  - групповая скорость электронов в идеальных подводах и  $dn_{\rightarrow}/dE = 1/(\pi\hbar v)$  - плотность состояний для электронов, движущихся слева направо в одномерной системе.

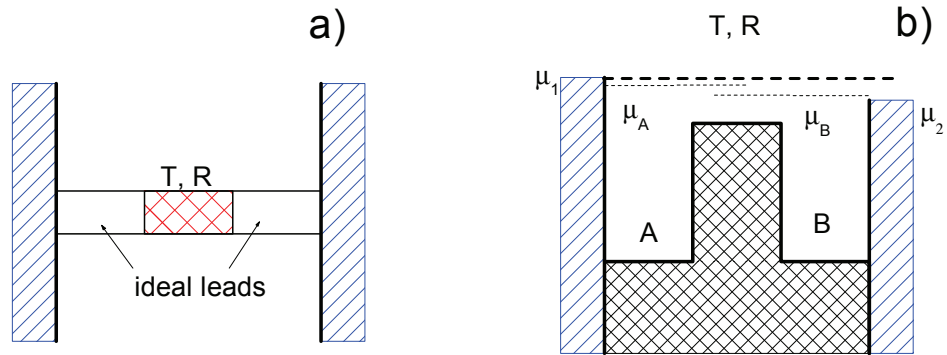


Рис. 5.1: Схема прохождения электронов через QW

Тогда полный ток текущий через систему есть

$$I = ev \frac{dn_{\rightarrow}}{dE} T(\mu_1 - \mu_2) = \frac{e}{\pi \hbar} T(\mu_1 - \mu_2). \quad (5.1)$$

Обратите внимание: скорость чудесным образом сократилась. Ток через наше баллистическое устройство не зависит от скорости!

Падение напряжения между контактами 1 и 2 равно  $V_{21} = (\mu_1 - \mu_2)/e$ .

Двух-зажимная проводимость между точками **1** и **2** равна:

$$G = \frac{I}{V_{21}} = \frac{e^2}{\pi \hbar} T. \quad (5.2)$$

Проводимость одиночного одномерного канала равна кванту проводимости!

Более точный анализ, который принимает во внимание подводящие провода (мы его не приводим из-за громоздкости), дает:

$$G = \frac{I}{V_{21}} = \frac{e^2}{\pi \hbar} \frac{T}{(1 - T)}. \quad (5.3)$$

## 5.1. Формула Ландауэра (LANDAUER, 1957) 3

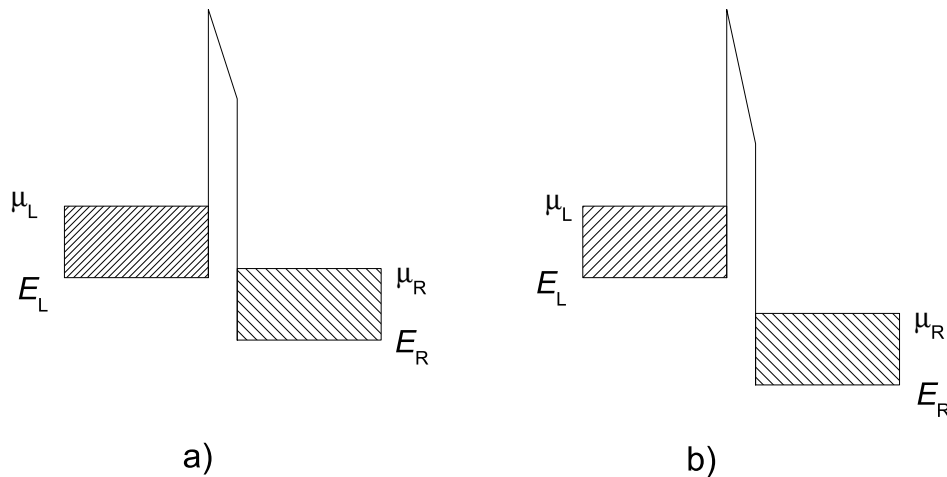


Рис. 5.2: Барьер, разделяющий два Ферми-моря электронов, с положительным напряжением приложенным к правой стороне. (а) случай малого приложенного напряжения, (б) большое приложенное напряжение; электроны с правой стороны не вносят вклада в полный ток.

### Повторим это более подробно.

Это выражение может быть выведено более общим и более строгим способом для произвольного потенциального барьера: Рассмотрим электроны, которые налетают на барьер с левой стороны (см. Рис. 5.2) и затем добавим электроны налетающие на барьер с правой стороны.

Ток вследствие электронов прилетающих слева может быть получен с помощью обычного выражения,

$$I = nqv, \quad (5.4)$$

если переписать его более точно, поскольку надо учесть зави-

симось  $T$  от импульса  $k$  или от энергии  $\varepsilon$ :

$$I_L = 2e \int_0^\infty f[\varepsilon(k), \mu_L] v(k) T(k) \frac{dk}{2\pi} \quad (5.5)$$

**Заметим:**

- множитель  $e$  переводит число электронов в заряд;
- область интегрирования ограничена положительными значениями  $k$ , поскольку мы рассматриваем только электроны распространяющиеся слева направо;
- коэффициент  $1/(2\pi)$  возникает вследствие объема в  $k$ -пространстве;
- Фермиевская функция распределения  $f[\varepsilon(k), \mu_L]$  отражает вероятность того, что состояние с энергией  $\varepsilon$  для электронов слева занято, при значении химического потенциала  $\mu_L$  на левой стороне;
- коэффициент прохождения барьера  $T(k)$  дает вероятность того, что налетающий электрон проходит через барьер вносит вклад в ток.

Заменяем интегрирование по  $k$  интегрированием по энергии:

$$dk = \frac{dk}{dE} dE = \frac{1}{\hbar v} dE \quad (5.6)$$

Проверим:

$$E = \hbar^2 k^2 / 2m \quad (5.7)$$

$$dE/dk = \hbar^2 k / m \quad (5.8)$$

$$k = mv / \hbar \quad (5.9)$$

$$dE/dk = \hbar v \quad (5.10)$$

## 5.1. Формула Ландауэра (LANDAUER, 1957) 5

Подставим это в выражение для тока (5.5) и обозначим дно зоны в левом и правом подводах  $E_L$  и  $E_R$ :

$$I_L = 2e \int_{E_L}^{\infty} f(E, \mu_L) v T(E) \frac{dE}{2\pi\hbar v} = \frac{2e}{h} \int_{E_L}^{\infty} f(E, \mu_L) T(E) dE. \quad (5.11)$$

Можно было бы ожидать, что состояния с большей энергией имеют большую скорость и поэтому будут вносить больший ток. Однако, опять скорость удивительным образом точно сокращается в этом выражении (иначе мы бы не получили квантование проводимости). Выражение для тока от электронов движущихся справа налево и слева направо почти идентичны, отличаясь только знаком, значением химического потенциала и пределом интегрирования.

$$I_R = -\frac{2e}{h} \int_{E_R}^{\infty} f(E, \mu_R) T(E) dE. \quad (5.12)$$

Коэффициент прохождения  $T(E)$  одинаков (в соответствие с зеркальной симметрией и симметрией обращения времени). Складывая два выражения получим результирующий ток:

$$I = I_L + I_R = \frac{2e}{h} \int_{E}^{\infty} [f(E, \mu_L) - f(E, \mu_R)] T(E) dE. \quad (5.13)$$

Два замечания:

- 1) Интеграл в интервале от  $E_R$  до  $E_L$  я опустил, т.к. в этом интервале энергии для R-электронов нет мест слева при низкой температуре,
- 2)

Как видно, ток **не пропорционален** напряжению и, в общем случае, закон Ома не выполняется.

**Проверить:**  $I = 0$  когда  $V = 0$  и  $\mu_L = \mu_R$ .

Имеются три важных предельных случая:

- Когда приложенное напряжение является большим, все состояния для электронов справа могут быть ниже дна зоны электронов с левой стороны и потому не будут давать вклада в ток. В этом случае функция заполнения

$f(E, \mu_R)$  может быть опущена из вышеприведенного выражения (5.13). Т.о., электроны с правой стороны не играют никакой роли вообще.

- При низкой температуре  $T \ll T_F$ , Фермиевская функция распределения может быть аппроксимирована ступенчатой функцией. Только электроны с энергией в интервале от  $E_L$  до  $E_R$  вносят вклад в ток. В этом случае результат упрощается:

$$I = \frac{2e}{h} \int_{\mu_R}^{\mu_L} T(E) dE \quad (5.14)$$

- Если напряжение смещения очень мало (по сравнению с  $\mu$ ), то разность Фермиевских функций распределения может быть разложена в наинизшем приближении. Положим  $\mu_L = \mu + (1/2)eV$  и  $\mu_R = \mu - (1/2)eV$ , где  $\mu$  - положение Фермиевского уровня в равновесии. Тогда

$$f(E, \mu_L) - f(E, \mu_R) \approx eV \frac{df(E, \mu)}{d\mu} = -eV \frac{df(E, \mu)}{dE} \quad (5.15)$$

Это справедливо, поскольку Фермиевская функция зависит только от разности  $E - \mu$ . Тогда

$$I = \frac{2e^2V}{h} \int_{E_L}^{\infty} \left( \frac{-df}{dE} \right) T(E) dE \quad (5.16)$$

Это - результат в Омическом режиме, когда ток пропорционален приложенному напряжению. В этом режиме проводимость  $G = I/V$  дается выражением

$$G = \frac{2e^2}{h} \int_{E_L}^{\infty} \left( -\frac{df}{dE} \right) T(E) dE \quad (5.17)$$

Сам по себе интеграл является безразмерным.

## 5.1. Формула Ландауэра (LANDAUER, 1957) 7

- При низких  $T$ , когда  $f$ -функция распределения является намного более резкой чем любые особенности в  $T(E)$ , можно заменить  $-df/dE = \delta(E - \mu)$  в проводимости. Тогда интеграл сводится к локальному значению при  $E = \mu$  и мы получаем простой результат:

$$G = \frac{2e^2}{h} T(\mu) \quad (5.18)$$

### Многоканальный случай

Рассмотрим систему с упругим рассеянием  $\mathbf{S}$ , которая имеет идеальные подводящие провода (“подводы”). Вследствие квантования в поперечном направлении система имеет дискретные уровни энергии  $E_i$  и, соответственно им имеет  $N_{\perp}$  проводящих каналов на уровне Ферми  $E_F$ . Каждый канал характеризуется своим продольным волновым вектором  $k_i$ , так что

$$E_i + \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} = E_F, i = 1, \dots, N_{\perp}. \quad (5.19)$$

Чему равно  $N_{\perp}$  ?

Возьмем 1D канал шириной  $W = \lambda_F/2$ . В нем существует только один уровень размерного квантования, который двукратно вырожден по спину  $N_{\perp} = 2W/(\lambda/2) = 2$ . Если канал в 2 раза шире,  $W = \lambda_F$ , то в нем поместятся два уровня размерного квантования, с  $\lambda/2 = W$  и  $\lambda = W$ . Т.о., в 1D-канале число уровней  $N_{\perp} = 2 \times 2W/\lambda$  (коэффициент 2 - вследствие спинового вырождения). Переходя к волновым числам получаем:

$N_{\perp}^{(1D)} = 2Wk_F/\pi$  для 1D-поперечного сечения шириной  $W$  и,  
 $N_{\perp}^{(2D)} = 2A/(\lambda_F/2)^2 = Ak_F^2/\pi^2$  для 2D-поперечного сечения площадью  $A$ ,

в обоих случаях с учетом спинового вырождения.

Все подводящие каналы -  
 (1): с левой стороны, идущие направо, и  
 (2) с правой стороны, идущие налево -  
 подпитываются электронами из соответствующих резервуаров с химическими потенциалами  $\mu_1, \mu_2$ , соответственно.

Система  $\mathbf{S}$  рассеивает следующим образом:

в приходящей слева волне  $j$ -тый канал имеет вероятности  $T_{ij}$  и  $R_{ij}$  для прохождения на правую сторону в  $i$ -тый канал и отражения на левую стороны в  $i$ -тый канал, соответственно. Аналогичные матрицы для волн приходящих с правой стороны обозначим прайм-индексами. В результате,  $2N_{\perp} \times 2N_{\perp}$  элементов в матрице  $S$  описывает нашу систему  $\mathbf{S}$ . Полная вероятность прохождения и отражения в  $i$ -тый канал равна:

$$T_i = \Sigma T_{ij}, \quad R_i = \Sigma R_{ij}, \quad (5.20)$$

Для случая показанного на рисунке 5.3, проводимость сужения близка к  $2\left(\frac{e^2}{h}\right) \times 1$ .

#### Рассмотрим простой наглядный пример

Пусть имеется сужение (constriction) вдоль направления распространения  $x$ . Зафиксируем координату  $y$ . На рисунке 5.3 изображено изменение уровней энергии вдоль канала (по  $x$ ) при фиксированной координате  $y$ : энергия каждой подзоны  $\varepsilon_N$  изменяется с положением точки  $x$  вдоль распространения электронной волны. Вдали от области сужения распространяется большое число состояний, однако по мере приближения к седловой точке волновые вектора большинства состояний становятся мнимыми и эти состояния встречают энергетический барьер  $\varepsilon_N(x) > E$ . Такие электронные состояния (моды 2, 3 и 4) могут частично проникнуть в барьер, однако, большая часть



5.1. Формула Ландауэра (LANDAUER, 1957) 9

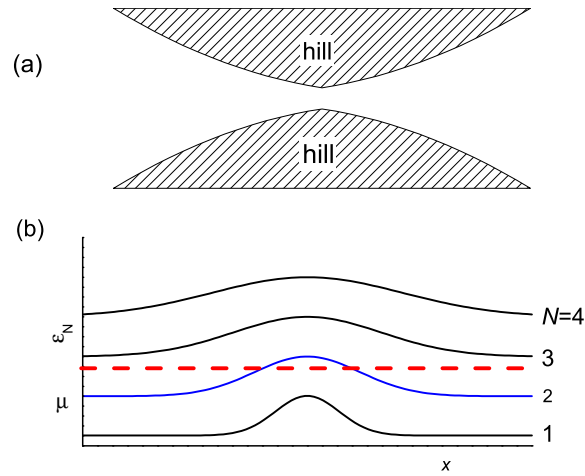


Рис. 5.3: Схематическое изображение плавного седлообразного потенциала области сужения. (а) Для создания потенциального барьера используются два расщепленных затвора. (б) Энергии  $\epsilon_N(x)$  поперечных мод в зависимости от их положения  $x$ . Штриховая линия показывает положение уровня Ферми.

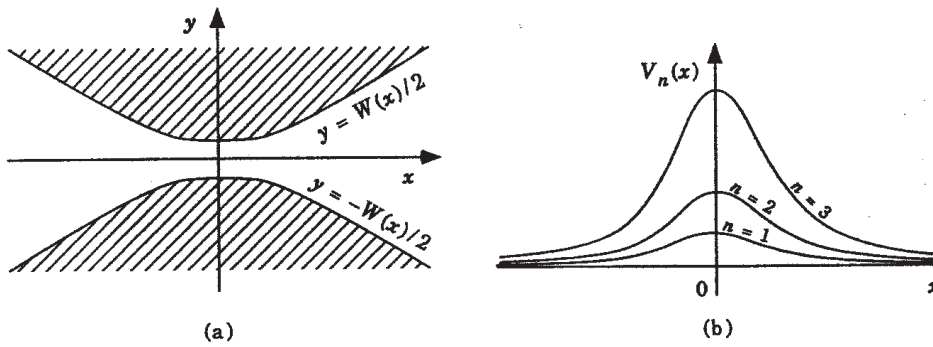


Рис. 5.4: Повторное, более реалистичное изображение уровней энергии

амплитуды волны отразится. Только моды 1 пройдут область сужения почти без отражения.

## 5.2 Квантовый точечный контакт (Quantum Point Contact, QPC)

QPC - это очень эффективный инструмент, который довольно плодотворно используется в разных областях мезоскопической физики. Например, Ю.В. Шарвин применял QPC для инжектирования электронов в нормальном (не сверхпроводящем) металле и изучения их баллистического распространения между такими двумя точечными источниками. QPC используется в спектроскопии сверхпроводников в микроконтактах S-N и S-N-S, в экспериментах по баллистической спектроскопии отношения  $e/m$  для квазичастиц в режиме дробного квантового эффекта Холла и для композитных фермионов. Здесь мы рассмотрим QPC как инструмент для изучения баллистического распространения электронных волн в квазиодномерной системе. В Si MOSFET электроны в 2D плоскости сосредоточены в области под металлическим затвором. Следовательно, квази-1D систему можно создать путем ограничения ширины канала с помощью затвора, а QPC - путем сужения 1D системы. В другом случае, актуальном для гетероструктур GaAs/AlGaAs, 1D канал можно создать нанесением двух расщепленных непрерывных затворов, которые при подаче отрицательного напряжения будут выдавливать электроны, обедняя область канала под собой, как показано на рисунке 5.5. Во всех случа-

5.2. Квантовый точечный контакт (QUANTUM POINT CONTACT, QPC) 11

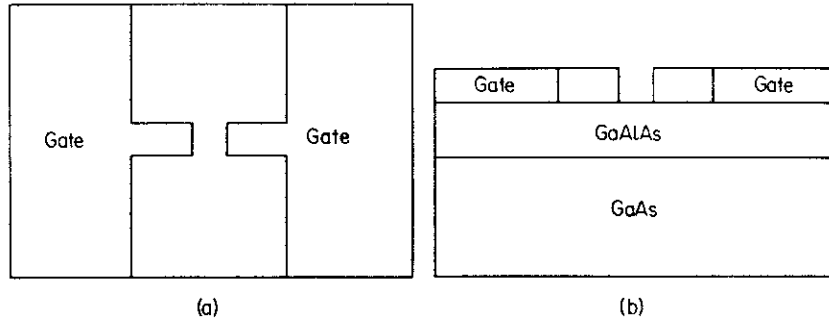


Рис. 5.5: Геометрия точечного контакта (сужения) в гетероструктуре GaAs/AlGaAs: (a) вид сверху, (b) поперечное сечение.

ях, как мы увидим, проводимость равна

$$G = \sum_1^{N_{max}} \frac{2e^2}{h}, \quad (5.21)$$

где  $N_{max} = k_F W / \pi$  (кратность спинового вырождения включена в формулу для  $G$ ).

Квантованная проводимость в баллистическом режиме транспорта в GaAs/AlGaAs гетероструктуре была обнаружена в экспериментах ван Вееса (van Wees) в 1988г., где использовалась геометрия “точечного контакта”; впоследствии эффект квантования проводимости был подтвержден во многих других независимых экспериментах. Пример квантованной проводимости приведен на рисунке 5.6. Как видно, проводимость изменяется ступенчатым образом с амплитудой ступенек  $2e^2/h \equiv e^2/(\pi\hbar)$  при изменении затворного напряжения, которое приводит к изменению эффективной ширины канала от 0 до 360нм.

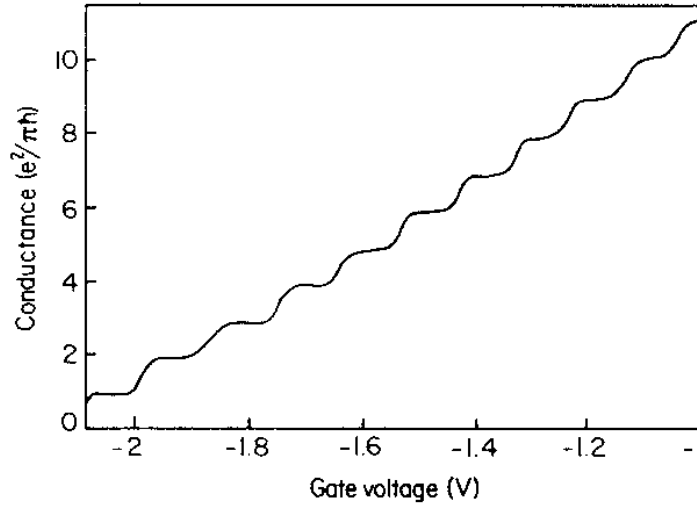


Рис. 5.6: Квантованная проводимость точечного контакта в 2D электронном газе. Приведено из работы van Wees et al. PRL **60**, 848 (1988).

Итак, проводимость 1D системы равна

$$G = \frac{2e^2}{h}T, \quad (5.22)$$

где  $T$  - коэффициент прохождения.

Рассмотрим простую модель квантового точечного контакта (QPC). Двумерный электронный газ (2DEG) сосредоточен в области  $|y| \leq W(x)/2$  в плоскости  $x - y$ , путем создания бесконечно высокой потенциальной стенки при  $y = \pm W(x)/2$ . Поместим начало отсчета (точку  $x = 0$ ) в место наибольшего сужения.

Тогда собственные состояния нашей модельной системы мо-

5.2. Квантовый точечный контакт (QUANTUM POINT CONTACT, QPC)13

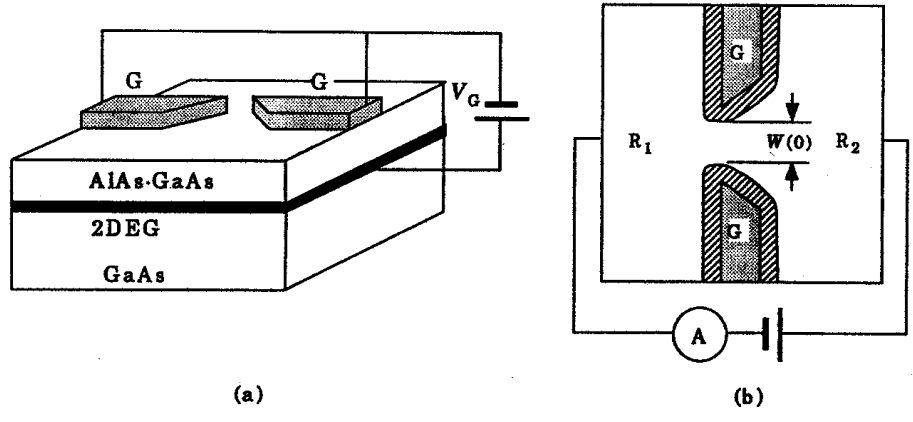


Рис. 5.7: Пример практического устройства с QPC создаваемым расщепленным затвором G: (a) пространственное изображение, (b) вид в плане.

гут быть найдены путем решения уравнения Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, y) + V(x, y) \Psi = E \Psi(x, y) \quad (5.23)$$

с граничными условиями

$$\Psi(x, \pm W(x/2)) = 0. \quad (5.24)$$

Решением этого уравнения является многомодовая волновая функция  $\Psi_n(x, y)$ , отвечающая эффективному потенциалу

$$V_n(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{W(x)} \right)^2. \quad (5.25)$$

Электроны в состояниях соответствующих каждой моде вносят независимый вклад в ток. Согласно формуле Ландауэра полная проводимость системы равна

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \quad (5.26)$$

Для медленно изменяющегося потенциала  $W(x)$  зависимость  $T_n$  от  $E_F$  очевидна и является почти классической:

$$T_n \approx \begin{cases} 1 & E_F > V_n(0); \\ 0 & E_F < V_n(0), \end{cases} \quad (5.27)$$

### 5.2.1 0.7-аномалия

На экспериментально наблюдаемых зависимостях  $G$  от затворного напряжения часто наблюдается загадочная особенность: первое плато проводимости возникает со значением несколько меньшим кванта проводимости, приблизительно  $(0.7-0.6)e^2/h$ . Происхождение этой т.н. “0.7-аномалии” до сих пор дискутируется. Одно из наиболее простых возможных объяснений состоит в следующем. Рассмотрим электрон движущийся в наини́зшем состоянии вдоль канала по направлению к QPC. Когда он приближается к QPC, то его потенциальная энергия возрастает и, следовательно, кинетическая энергия уменьшается. Другими словами, электрон замедляется приближаясь к QPC. Электроны, движущиеся вдоль каналов с различными номерами должны двигаться независимо, однако это заключение справедливо только для невзаимодействующих электронов.

Рассмотренный электрон в канале наини́зшего порядка остается вблизи точки максимума потенциала дольше чем другие электроны с более высокой энергией. Это создает эффективный отрицательный заряд вблизи QPC, который работает как Кулоновская блокада для других электронов. В результате, эффективная проводимость QPC возрастает медленнее чем в отсутствие Кулоновской блокады. Можно переформулировать это объяснение иными словами : амплитуда электронной волновой функции обратно пропорциональна квадрату скорости.

Когда электрон замедляется, амплитуда его волновой функции растет вблизи потенциального максимума QPC, действуя как локализованный эффективный заряд, который отталкивает другие электроны.

### 5.3 Образовательный эксперимент: качающиеся проводники

J.L.Costa-Kraemer и соавторы, *Science* **342**, L1144-L1149 (1995). Простое экспериментальное устройство состояло из двух золотых проволочек (диаметром 0.1мм), изогнутых так, чтобы свободно касаться друг друга. Идея эксперимента состоит в следующем. Проводимость будет зависеть от силы, прижимающей две проволочки друг к другу. Проводимость измеряется при приложении фиксированного напряжения  $\sim 10$ мВ путем измерения протекающего тока. Сила, действующая на контакты, изменяется при постукивании держателя. Вибрация проволочек приводит к изменению проводимости от времени.

### 5.4 Аналогия в оптике

Рассмотрение в предыдущей секции никак не зависело от типа волн. Все что использовалось при рассмотрении - это просто изменение числа волновых мод, которые могут распространяться вдоль канала. Поэтому подобные явления можно наблюдать также с акустическими или со световыми волнами. E.A.Montie и др.. [*Nature*, **350**, April 18 (1991)] использовал оптические волны инфракрасного диапазона  $\lambda = 1.55\mu\text{м}$ . На рисунке 5.9а изображена схема устройства, использован-

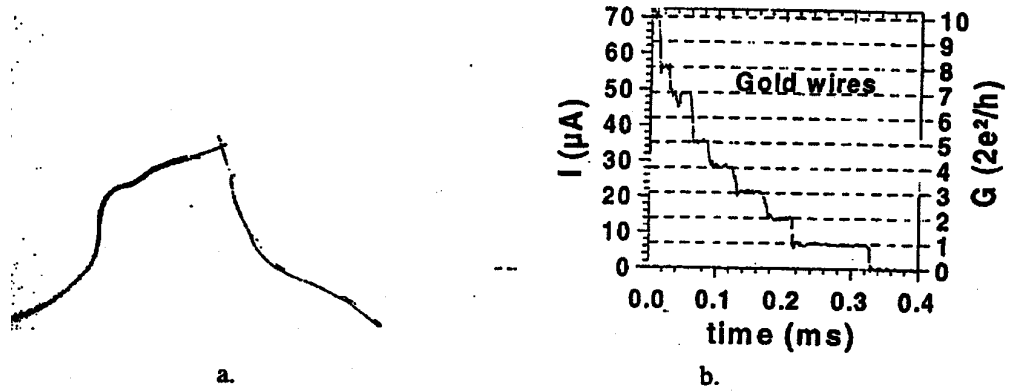


Рис. 5.8: Эксперимент с касающимися проволочками: (а) скрещенные проволочки, (б) результат эксперимента

ного в этом эксперименте. Свет может входить в объем детектора (типа “интегрирующая сфера”) через щель. Интегрирующая сфера измеряет полную входящую мощность излучения. Ширина входной щели может изменяться с помощью пьезо-привода. Результат эксперимента приведен на рисунке 5.9b. Каждая ступенька соответствует изменению ширины щели примерно на  $\sim 0.7\mu\text{m}$  или половине длины волны, что соответствует изменению числа разрешенных (проходящих) мод на единицу.

**Подытожим вышепроведенное рассмотрение, проведя мысленный эксперимент:**

1. Подадим на затвор создающий сужение (см. рисунки 5.4, 5.5 и 5.7) отрицательное напряжение смещения достаточно большой величины  $|V_g|$ , так, чтобы заштрихованные



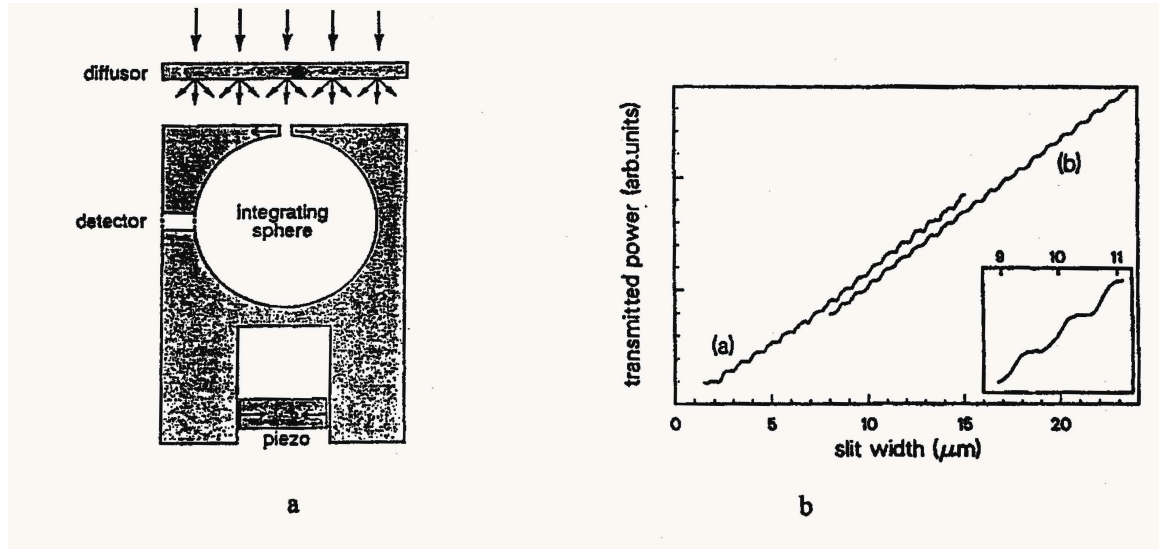


Рис. 5.9: Оптический аналог эксперимента по квантованию проводимости

области под затвором были полностью обеднены и слились в одну область. В этом случае нет проводящих каналов между резервуарами  $R_1$  и  $R_2$  (в терминологии Ландаура) и, следовательно  $G = 0$ .

2. Начнем уменьшать  $|V_g|$ ; когда мы сделаем  $V_1(0) < E_F/e$ , откроется первый проводящий канал, и вклад электронов моды **1** в проводимость  $G$  станет  $\approx 2e^2/h$ .
3. При дальнейшем уменьшении  $V_g$  проводимость станет изменяться ступенчатым образом:

$$G \approx \frac{2e^2 N}{h}, \quad (5.28)$$

где  $N$  определяется так, что  $V_{N(0)} < E_F/e > V_{N+1}(0)$ .

## 5.5 2D система в магнитном поле $B_{\perp}$ : эффект Аронова-Бома (Aharonov-Bohm)

[Y. Aharonov, D. Bohm Phys.Rev. В **115**, 485(1959)]

Этот эффект является наиболее красивой демонстрацией волновой природы электронов, а также первичной роли вектор-потенциала, а не магнитного поля.

Проведем мысленный эксперимент в 2D системе. Рассмотрим интерференцию электронных волн в точке  $D$ , приходящих в нее из точки  $S$  (через щель), как показано на рисунке 5.12. Рассмотрим два произвольных пути, **1** и **2**, между которыми помещен бесконечно длинный соленоид; в результате, две траектории охватывают магнитный поток  $\Phi$  в соленоиде. В любой точке траекторий **1** и **2** магнитное поле равно нулю. Для электронной волны, распространяющейся по пути  $i$  волновая функция приобретает сдвиг фазы

$$\psi_i(r) = \exp[-i\theta_i(\mathbf{r})]\psi_i^0(\mathbf{r}), \quad (5.29)$$

$$\theta_i(r) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_S^D \mathbf{A} dr_i, \quad (5.30)$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  - вектор-потенциал,  $\Phi_0 = hc/e$  - квант магнитного потока,  $\psi_i^0$  - волновая функция в отсутствие вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ , и  $dr_i$  - инкремент вдоль пути  $i$ .

Полная амплитуда электронной волны в точке  $D$  равна

$$\begin{aligned} |\psi_1(D) + \psi_2(D)| &= |\psi_1(D)|^2 + |\psi_2(D)|^2 + 2\text{Re}\psi_1^*(D)\psi_2(D) \approx \\ &\approx 2|\psi_1^0(D)|^2 [1 + \cos[\xi_E(D) + \theta_1 - \theta_2]] \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.5. 2D система в магнитном поле  $B_{\perp}$ : эффект Аронова-Бома (AHARONOV-BOHM)19

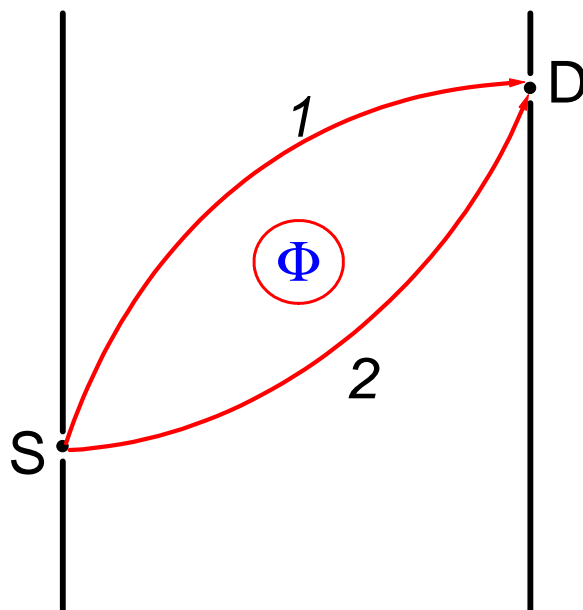


Рис. 5.10: Схематическое устройства эксперимента, демонстрирующего эффект Аронова-Бома (АВ)

где разность фаз

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left[ \int_S^D \mathbf{A} dr_1 - \int_S^D \mathbf{A} dr_2 \right] = \frac{2\pi}{\Psi_0} \oint \mathbf{A}(s) ds = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (5.32)$$

Выше было сделано предположение о том, что  $|\psi_1(D)|^2 \approx |\psi_2(D)|^2$ , что является довольно разумным для распространяющихся плоских волн, и введено обозначение  $\xi_E(D)$ , так что  $\psi_1^{0*}(D)\psi_2^0(D) = |\psi_1^0|^2 \exp[i\xi_E(D)]$ .

**Полная амплитуда в точке  $D$  осциллирует как функция магнитного потока, охваченного двумя интерферирующими путями. Несмотря на то, что электроны распространяются в области, в которой магнитное поле равно нулю, на электроны действует вектор потенциал поля.**

### 5.5.1 Другой вывод выражения для эффекта АВ

Из учебника квантовой механики известно, что вектор-потенциал модифицирует канонический импульс электрона с зарядом  $e$ , движущегося со скоростью  $v$ :

$$p = \hbar k = mv + (e/c)A \quad (5.33)$$

Изменение импульса вызывает изменение фазы волновой функции электрона, которое набегаёт при движении на некоторое расстояние. Т.о., даже если магнитное поле  $= 0$  на всей траектории электрона, оно влияет на фазу волновой функции через вектор-потенциал. Были проведены прямые эксперименты по проверке АВ-эффекта, в частности:

- для электронов в свободном пространстве [А. Tonomura et al. Phys.Rev. Lett. **48**, 1443 (1982); А. Tonomura et al. Phys.Rev.

Lett. **56**, 792 (1986)]

- для куперовской пары в Джозефсоновском контакте [Giaver].

Нас, однако, это интересует в применении к твердотельным и несверхпроводящим структурам. Полное изменение фазы, приобретенное электроном распространяющимся вдоль некоторой траектории, описываемой переменной  $l$  сразу следует из канонического импульса

$$\Delta\phi = \int \bar{k} d\bar{l} = \frac{1}{\hbar} \int (m\bar{v} + \frac{e}{c}\bar{A}) d\bar{l} = \Delta\phi_v + \Delta\phi_A \quad (5.34)$$

т.е. равно сумме вклада от скорости  $v$  частицы и вклада от вектор-потенциала  $A$ . Т.о., фазовый сдвиг, индуцируемый вектор-потенциалом дается выражением

$$\Delta\phi_A = \frac{e}{\hbar c} \int \bar{A} d\bar{l} \quad (5.35)$$

Следовательно, набег фазы у электрона, распространяющегося по замкнутой траектории равен

$$\Delta\phi_A = \frac{e}{\hbar c} \int \bar{A} d\bar{l} = \frac{e}{\hbar c} \oint (rot \bar{A} d\bar{S}) = \frac{e}{\hbar c} BS = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (5.36)$$

где  $\Phi_0 = hc/e$  -квант потока. Итак, разность фаз равна  $2\pi$  умноженному на вложенный в траекторию поток (в единицах кванта потока  $\Phi_0$ ). Окружаемый траекторией поток называется поток Аронова-Бома.

### 5.5.2 Эффекты Аронова-Бома (АВ) и Альтшулера-Аронова-Спивака

Б. Альтшулер, А. Аронов, Б. Спивак, ЖЭТФ Lett. **33**, 101 (1981)  
Ю.В. Шарвин, Д.Ю. Шарвин, Б. Альтшулер и др., Письма в ЖЭТФ.

R.Webb, S.Washburn, et al. PRL. **54**, 2696 (1985). (не путать - Аронова из СПб с Aharonov!)

Наша цель - выяснить как эффект АВ проявляется в твердотельных наноструктурах. В противоположность оригинальной геометрии АВ, в твердотельных структурах магнитное поле обычно не сосредоточено только внутри кольца или замкнутой петли, оно также проникает в ту область где находятся электроны. В таком случае электроны испытывают не только действие вектор-потенциала, но также и действие магнитного поля. Несмотря на это, результирующий эффект также часто называется эффектом АВ.

На рисунке 5.11 изображено кольцо малого поперечного сечения с двумя выводами напротив друг друга, присоединенными к кольцу в точках  $J_1$ ,  $J_2$  для того чтобы можно было измерять проводимость. Внешнее магнитное поле индуцирует поток  $\Phi$  через кольцо. Существуют траектории двух типов, показанные на панелях а) и б). На рисунке а) изображены траектории **1** и **2** длиной  $L_1 \approx L_2$ , проходящие из  $J_1$  в  $J_2$  по верхнему и нижнему полукольцу. На рис. б) изображены траектории **3** и **4**, полностью оббегающие всю петлю по и против часовой стрелки.

Рассмотрим вначале траектории типа **1** и **2**. Набегающая разность фаз АВ описывается уравнением 5.11: половина фазовой задержки (т.е. отрицательного знака) набегает вдоль одного пути, и другая половина - фазовое опережение (положительного знака) - вдоль второго пути. Соответственно, полная разность фаз будет увеличиваться на  $2\pi$  каждый раз когда один квант потока добавляется в кольцо. Т.о. период осцилляций АВ происходящих от этих траекторий будет равен  $\Phi_0$  или  $(hc/e)$ .

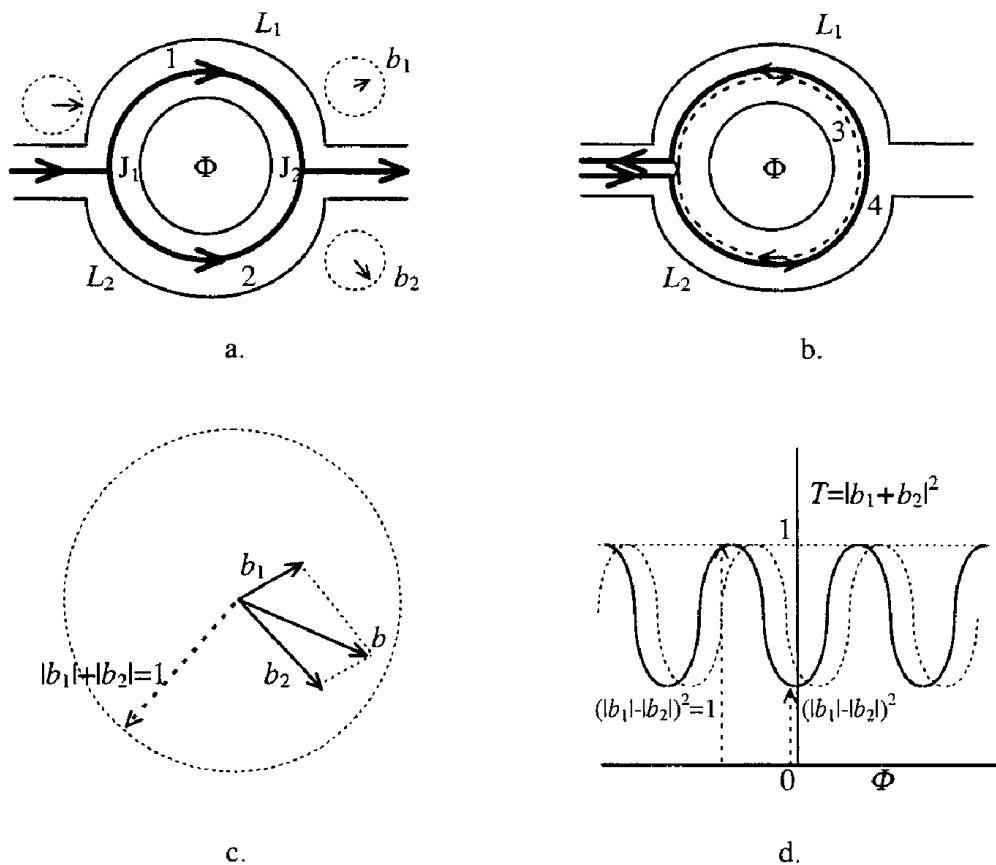


Рис. 5.11: Картина интерференции электронных волн в проводящем кольце. Полуциркуговые траектории типа 1 и 2, показанные на панели (а), приводят к когерентному рассеянию вперед. Две полные круговые траектории типа 3 и 4, показанные на панели (b), приводят к когерентному рассеянию назад. (c) показывает векторное суммирование амплитуд волн. (d) - полная вероятность прохождения  $T = |b_1 + b_2|^2$  для полностью идентичных траекторий 1 и 2 (сплошная линия) и для не эквивалентных путей 1 и 2.

Мы уже видели ранее, основываясь на подходе Ландауэра, что проводимость системы определяется вероятностью прохождения электронных волн  $T$ . Т.о., для того чтобы найти проводимость кольца, надо оценить  $T$  - вероятность прохождения для волны с единичной амплитудой. Пусть, для определенности, волна приходит со стороны левого вывода, расщепляется на две волны в месте соединения  $J_1$ . Эти парциальные волны проходят по своим путям и рекомбинируют в месте  $J_2$ . При этом надо учесть фазы, которые парциальные волны накопили проходя по своим путям. Наш план таков: проведем сначала упрощенное рассмотрение интерференции, обсудим его и затем исправим одну ошибку, вытекающую из упрощенного рассмотрения.

Обозначим  $a_1$  и  $a_2$  - амплитуды парциальных волн проходящих по путям 1 и 2 из расщепителя  $J_1$ ;  $b_1$   $b_2$  - амплитуды волн приходящих в точку  $J_2$  для формирования выходной волны (рис.5.11). Для волны единичной амплитуды  $|a_1 + a_2|^2 = 1$  и общий коэффициент  $T$  прохождения (вероятность) получается векторным суммированием парциальных волн  $b_1$  и  $b_2$ :  $T = |b_1 + b_2|^2$  (см. рис. 5.11с, d ). Т.о. мы можем записать

$$\begin{aligned} b_j &= a_j F(L_j) \exp(-i\Delta\phi_j) = a_j F(L_j) \exp[-i(\Delta\phi_{v,j} + \Delta\phi_{A,j})], \\ j &= 1, 2, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где  $\Delta\phi_{v,j}$ ,  $\Delta\phi_{A,j}$  обозначает набираемое изменение фазы для парциальной волны вдоль пути  $j$ , в поле  $B = 0$  и  $B \neq 0$ , соответственно. Префактор  $F(L_j)$  выбран действительным и для начала, предположим что он равен 1. Для вероятности прохождения  $T$  получаем (см. геометрическую интерпретацию на



рис. 5.11 с).

$$T = a_1^2 F^2(L_1) + a_2^2 F^2(L_2) + 2a_1 a_2 F(L_1) F(L_2) \cos(\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2) \quad (5.38)$$

Для идеального абсолютно симметричного кольца оба пути **1** и **2**, также как и амплитуды парциальных волн  $a_j$  для двух путей ( $a_1 = a_2 = 1/2\sqrt{2}$ ) равны. Симметрия кольца и равенство длин предполагает также одинаковость набегов фазы  $\Delta\phi_{v,j}$ . Если  $B = 0$ , то две волны придут в точку  $J_2$  с одинаковым набегом фазы, т.е.  $\cos(\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2) = 1$ . Т.о. эта конструктивная интерференция дает максимум вероятности прохождения вперед  $T$  волны на выходе. Это означает то же самое что и максимум проводимости через кольцо  $J_1 J_2$  при  $\Phi = 0$ .

В предположении об отсутствии потерь при распространении по каждому полукольцу  $F(L_1) = F(L_2) = 1$  получаем  $T = 1$ , т.е. единичная проводимость. Если поток не равен нулю, то вектор-потенциал сделает разность фаз ненулевой в уравнении 5.38, так что  $\cos$ -член станет  $< 1$  - см. Рис. 5.11 с. В частности, при  $\Phi = \Phi_0/2$  косинус от  $2\pi\Phi/\Phi_0$  обратится в -1, что приведет к падению проводимости до 0 и полному подавлению прохождения волны через кольцо. Т.о. проводимость (и сопротивление) будет осциллировать в зависимости от  $\Phi$  с периодом задаваемым квантом потока через кольцо. Размах осцилляций зависит от отношения двух парциальных амплитуд  $b_1/b_2$ .

В реальной структуре условие идеальности - равенство фазовых набегов в двух плечах выполняется если длины полуколец равны с точностью много лучше длины волны электрона  $\lambda_F \sim 5\text{нм}$ , поскольку набег фазы на  $2\pi$  в каждом из плеч происходит при изменении длины пути на  $\lambda_F$ . Т.е. точность изготовления кольца должна быть лучше 0.1нм. Такое усло-

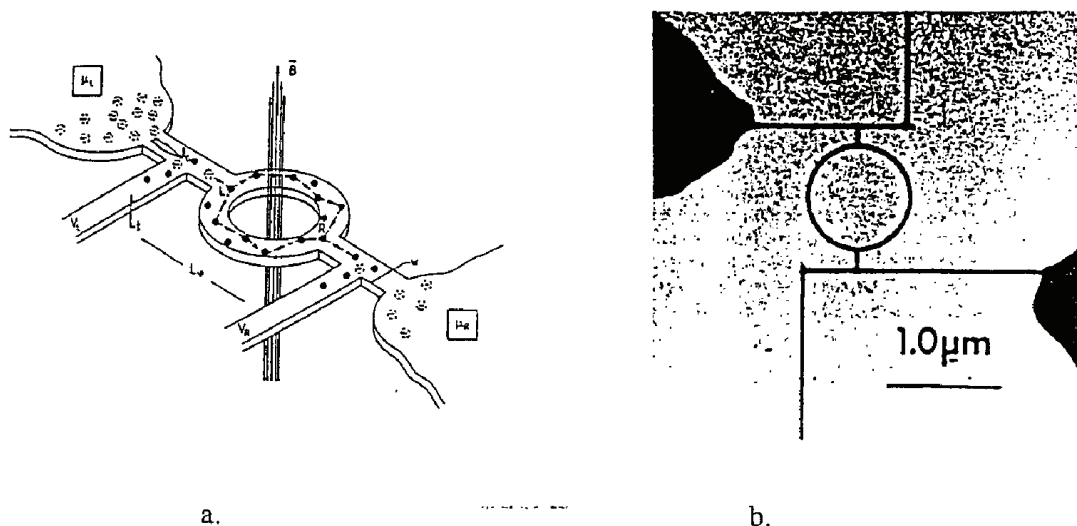


Рис. 5.12:

вие пока невозможно выполнить с существующей на сегодня технологией. Т.о. в реальном кольце при  $B = 0$  два пути 1 и 2 не будут одинаковыми и разность их фаз по прибытии в точку  $J_2$  не будет равна 0. Поскольку длина путей будет зависеть от случайных неточностей изготовления полуколец, то разность фаз двух волн по прибытию в точку  $J_2$  будет случайной от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

Казалось бы полный коэффициент прохождения при  $B = 0$  будет случайной величиной в интервале от максимума до минимума. Это однако справедливо лишь для нашей упрощенной картинке. На самом деле мы не учли, что волны прийдя в точку  $J_2$  пройдут в вывод лишь частично, и частично отразятся от вывода и пойдут снова по другому плечу кольца.

Рассмотрим второй класс траекторий - **3** и **4** на рисунке

5.11. Во первых, каждая из парциальных волн обегает полное кольцо, возвращается назад и интерферирует сама с собой в точке  $J_1$ . Эта интерференция приводит к эффективному рассеянию **назад**.

Во вторых, вследствие симметрии обращения времени, помимо волны распространяющейся по часовой стрелке имеется такая же волна, бегущая против часовой стрелки. Их интерференция при  $\Phi = 0$  также дает эффективное рассеяние назад. При  $B \neq 0$  фазы, набираемые двумя волнами **3** и **4** равны

$$\begin{aligned}\Delta\phi_3 &= +2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} \\ \Delta\phi_4 &= -2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0} = -\Delta\phi_3.\end{aligned}\tag{5.39}$$

Это означает, что разность фаз  $\Delta\phi_3 - \Delta\phi_4$  в два раза больше чем между волнами **1** и **2**. Поэтому, при изменении магнитного поля осцилляции будут происходить в два раза чаще, чем в эффекте АВ. Этот эффект, наблюдаемый впервые Ю.В. Шарвиным и Д.Ю. Шарвиным называется осцилляциями Альтшулера-Аронова-Спивака (ААС).

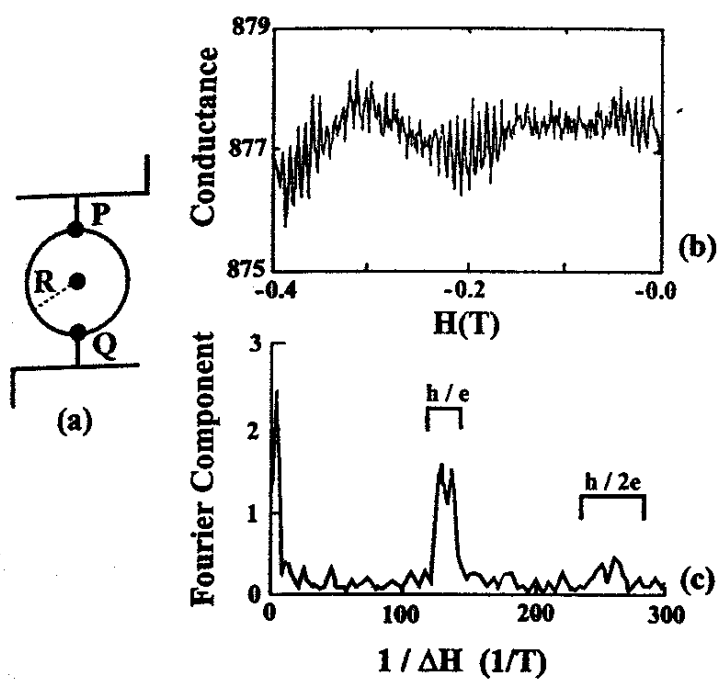


Рис. 5.13: Золотое кольцо в эксперименте (R.Webb). Диаметр кольца 825нм, ширина 40нм. (а) схема устройства, (b) результат измерений - осцилляции проводимости и (с) Фурье-спектр осцилляций.