

Лекция 7.

Диффузионный транспорт в мезоскопических системах

Определение:

$$\lambda_F, l_i, l \ll L$$

Диффузионный классический

$$\lambda_F, l \ll L, l_i,$$

Диффузионный квантовый

7.0.1 Классический диффузионный транспорт

Электроны движутся изотропно со средней скоростью $\langle \mathbf{v} \rangle$.

$\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ при $\mathbf{E} = 0$

Если $\mathbf{E} \neq 0$, то на электроны действует сила $e\mathbf{E}$, то

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = -e\bar{E}t/m$$

$$\bar{v}_d \equiv \langle \mathbf{v}(\tau) \rangle = -\frac{e}{m}\tau\bar{E} \equiv -\mu\bar{E},$$

$$\sigma = \frac{\bar{j}}{\bar{E}} = \frac{-en_e \langle \bar{v} \rangle}{\bar{E}} = \frac{n_e e^2 \tau}{m} = ne\mu$$

Мы получили формулу Друде – чисто классическую; в ней нет ничего квантового

7.02. Квазиклассика

Рассмотрим, для определенности 2D систему.

Из периодичности решетки

$$n_e^{2d} = \frac{g_s}{(2\pi)^2} \pi k_F^2 = \frac{g_s}{4\pi} k_F^2$$

$$l = v_F \tau = \frac{\hbar k_F}{m} \tau.$$

Подставим все это
в ф-лу Друде:

$$\sigma_{2d} = \frac{e^2}{2\pi m} k_F^2 \tau = \frac{e^2 v_F \tau}{h} k_F = \frac{e^2}{h} k_F l = \frac{2e^2}{h} \frac{\pi l}{\lambda_F} \sim \frac{2e^2}{h} \frac{l}{d_{ee}}$$

В вырожденной системе только состояния с энергией $|E - E_F| < kT$ могут рассеиваться (запрет Паули). Для их учета вспомним плотность состояний в 2D

$$\nu_{2d} \equiv \frac{dn}{dE} = \frac{g_s m}{2\pi \hbar^2}$$

и перепишем выражение Друде для проводимости

$$\sigma_{2d} = \frac{g_s e^2 k_F l}{h \cdot 2} = e^2 \frac{g_s}{2\pi \hbar} \frac{m \hbar k_F}{\hbar 2m} l = e^2 \left(\frac{g_s m}{2\pi \hbar^2} \right) \left(\frac{v_F l}{2} \right)$$

$$\sigma_{2d} = \frac{g_s e^2 k_F l}{h} = e^2 \frac{g_s}{2\pi\hbar} \frac{m\hbar k_F}{\hbar 2m} l = e^2 \left(\frac{g_s m}{2\pi\hbar^2} \right) \left(\frac{v_F l}{2} \right)$$

Коэффициент диффузии в 2D системе: $D_{2d} = v_F l / 2$

$$\sigma_{2d} = e^2 \nu_{2d} D_{2d}$$

Но это просто соотношение Эйнштейна для проводимости.
Ясно видна роль плотности состояний на уровне Ферми.

7.03. Поговорим немного о коэффициенте диффузии

Коэффициент диффузии зависит от размерности системы d

$$D_d = \frac{1}{d} v_F l = \frac{1}{d} v_F^2 \tau$$

В статфизике, коэффициент диффузии описывает как изменяется скорость индивидуального электрона до и после рассеяния. Более точно это дается коррелятором скорости (формула Кубо):

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по всем возможным направлениям в пространстве скоростей (или импульсов), которые может иметь начальная скорость $v(0)$, а индекс x означает направление приложенного электрического поля E_x .

В качестве упражнения вычислим коэффициент диффузии для одномерной системы $d = 1$. Предположим Друдевский механизм рассеяния, т.е. полную потерю памяти после каждого акта рассеяния. Тогда

$$D_{d=1} = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt = \int_0^{\tau} + \int_{\tau}^{\infty}$$

В первом интеграле для коротких времен $t < \tau$ скорости $v(t)$ и $v(0)$ скоррелированы, т.е. произведение $v_x(t)v_x(0) \approx (v(0))^2$.

Для второго интеграла произведение будет случайным и обратится в ноль после усреднения. Для 1D-пространства есть только два направления скорости $+x$ и $-x$, поэтому $(v_x(0))^2 = v_F^2$ и из формулы Кубо получаем подтверждение нашего пальцевого результата

$$D_{d=1} = v_F^2 \tau$$

Вспомним законы Фика для диффузии

1й закон:

$$J = -D \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

J - диффузионный поток (количество массы переносимой в единицу времени через единицу площади), ϕ - концентрация (напр, количество вещества в единице объема)
 x - положение в пространстве.

При $d = 2, 3$ надо записать $J = -D\nabla\phi$

Градиент концентрации – движущая сила для диффузии.

Запишем баланс массы: согласно ему а также согласно здравому смыслу изменение концентрации в данной точке должно быть равно разности потока втекающих и вытекающих частиц. Применим также 1й закон Фика и получим

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}J = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

Физиолог Adolf Fick установил эти законы экспериментально, в 1855г. измеряя диффузию в водных растворах соли):

Предположим, что D постоянен и не зависит от координаты, тогда получаем

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$$

2й закон Фика для случая $d = 2, 3$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\nabla^2\phi$$

Запишем 2й закон Фика в наших обозначениях для 2D системы электронов:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\vec{r}, t).$$

Решение этого уравнения в цилиндрических координатах:

$$n_{2d}(\vec{r}, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right).$$

Зад.: проверить !

Отсюда можно вычислить среднее расстояние, на которое ансамбль частиц уйдет за время t от начала координат:

$$l(t) \equiv \langle |\vec{r}(t)| \rangle \equiv \frac{\int |\vec{r}| n(\vec{r}, t) d\vec{r}}{\int n(\vec{r}, t) d\vec{r}} = \boxed{\sqrt{Dt}}$$

Зад.: вывести !

Ранее мы уже пользовались этим результатом, но теперь вывели его. Он означает, что в диффузионном режиме среднее смещение растет как корень из времени.

Отсюда автоматически следует, например, что длина сбоя фазы и время сбоя фазы в диффузионном режиме связаны соотношением

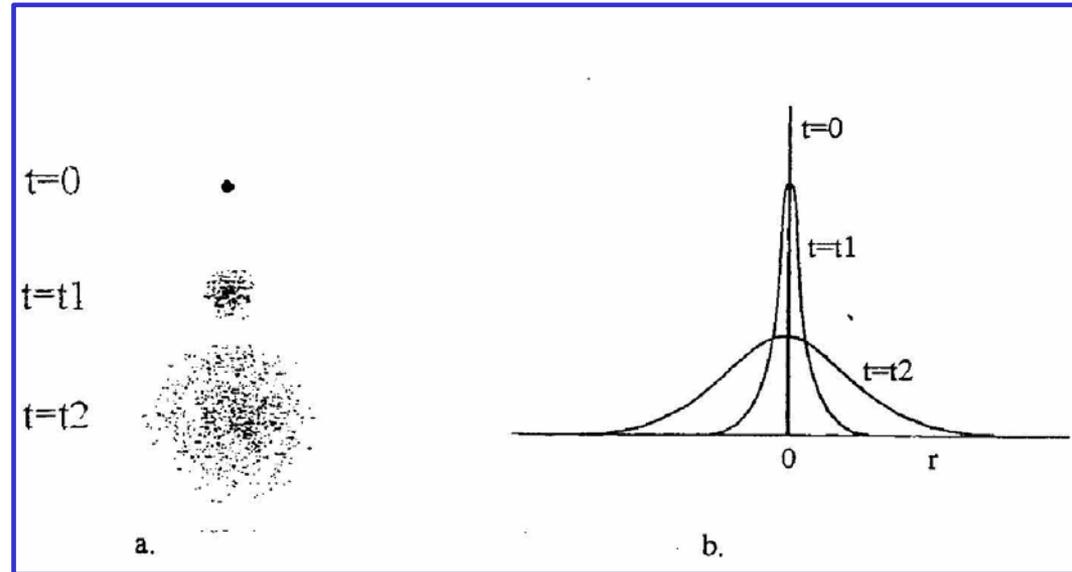
$$l_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$$

То же самое соотношение связывает неупругую длину l_l с неупругим временем τ_l .

Диффузионное движение классической частицы в пространстве в зависимости от времени.

(a) расширение области в реальном пространстве показывает как плотно упакованное распределение частиц в момент $t = 0$ в точке $r = 0$ расширяется со временем.

(b) Гауссова форма плотности вероятности $n(r, t)$ обнаружить частицу в точке r во время t .



NB

Вы не заметили, что мы как-то мимоходом, не обсуждая того, перешли от числа электронов (т.е. объема Ферми сферы) к плотности состояний на поверхности Ферми. Это соотношение есть теорема Латинжера. Для невзаимодействующей системы она тривиально получается из принципа Паули, но важно что она остается справедливой даже в случае взаимодействующей системы.

7.04. Квантовый диффузионный транспорт. Слабая локализация

Рассмотрим случай $\lambda_F, l_e \ll L, l_\phi$

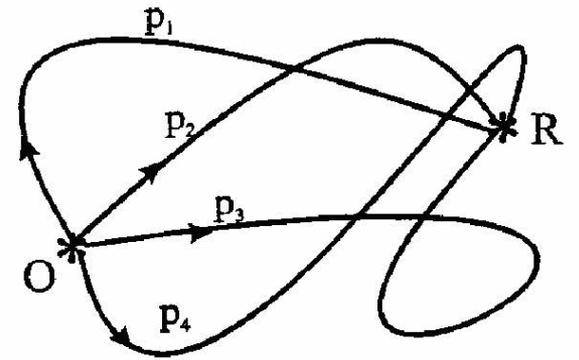
14.1.1 Упругое и неупругое рассеяние

До сих пор мы предполагали, что каждый акт рассеяния полностью стирает информацию о предыдущей величине и направлении скорости электрона. Это означает, что мы пренебрегли корреляцией фазы волновой функции. Если фаза хотя бы частично сохраняется при рассеянии, то это повлияет на проводимость связанную нами посредством Эйнштейновского соотношения с коэффициентом диффузии.

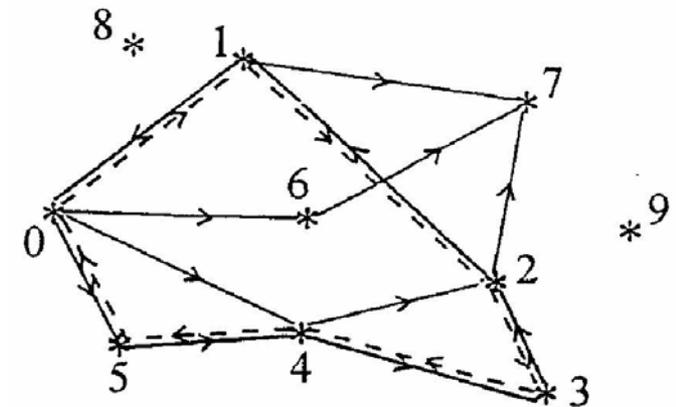
Действительно, сохранение фазы в процессе рассеяния вносит корреляцию между скоростями на временах, больших чем время упругого рассеяния τ_e .

Обозначим τ_ϕ - время фазовой когерентности, т.е. время на котором спадает корреляция

Электронные волны, распространяются в неупорядоченной среде с упругими рассеивателями. Волновая функция одного электрона из точки O разлагается в ряд частных волн ψ_j , каждая из которых следует по вполне определенному пути p_j и приходит в конечную точку R с коэффициентом прохождения t_j .



Электронная волна исходит из точки O . Выделим два класса траекторий. В первом классе конечная точка выбрана случайно, например, 7. Амплитуда волны в точке 7 сложится из волн прошедших по путям $0-1 \rightarrow 7$, $0-4-2 \rightarrow 7$, $0-5-4-3-2 \rightarrow 7$ и т.д.



$$\Psi(7) = \sum_j \psi_j = \sum_j t_j \exp(i\varphi_j)$$

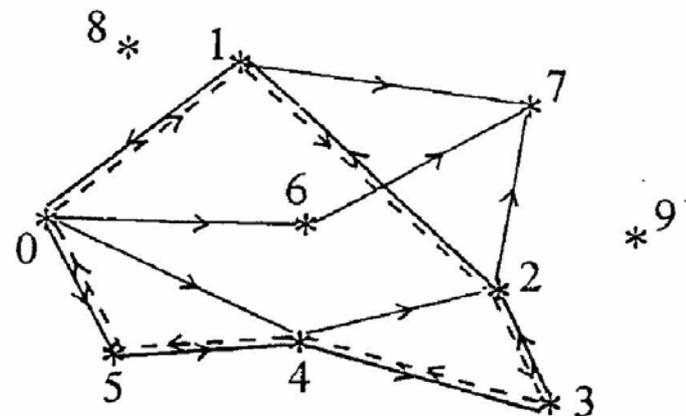
$$P(7) = |\Psi(7)|^2 = \sum_j t_j^2 + \sum_{j \neq k} t_j t_k \cos(\varphi_j - \varphi_k)$$

В пределе $j \rightarrow \infty$ мы получаем классический результат - сумма вероятностей распространения по всем путям.

$$P(7) = \sum_j t_j^2$$

А что будет, если начальная и конечная точки выбраны не случайно? Пусть начальная и конечная точки совпадают в точке О. Какова вероятность возвращения в ту же точку из которой вышел электрон?

Это например траектории 0-1-7-6-0 или 0-5-4-0. Если различные пути выбраны случайно, то набег фаз случайны и при усреднении мы ничего нового не получим.



Но есть пути, которые удовлетворяют соотношению инверсии времени. Это, например траектории 0-1-2-3-4-5-0 и 0-5-4-3-2-1-0.

Симметрия обращения времени означает, в частности, что фазы, набираемые на каждой траектории из такой пары равны друг другу. Обозначим (+) и (-) коэффициенты прохождения и набег фазы для путей распространения по часовой стрелке и против. Тогда вероятность возвращения в точку 0 по одному из путей j

$$P_j(0 \rightarrow 0) = t_{j+}^2 + t_{j-}^2 + t_{j+}t_{j-} \cos(\varphi_j - \varphi_j) + t_{j-}t_{j+} \cos(\varphi_j - \varphi_j) = 4t_j^2,$$

поскольку $t_{j+} = t_{j-}$ и набег фаз равны. Суммируя по всем парам путей взаимно-обращенных по времени, получаем вероятность возврата в исходную точку

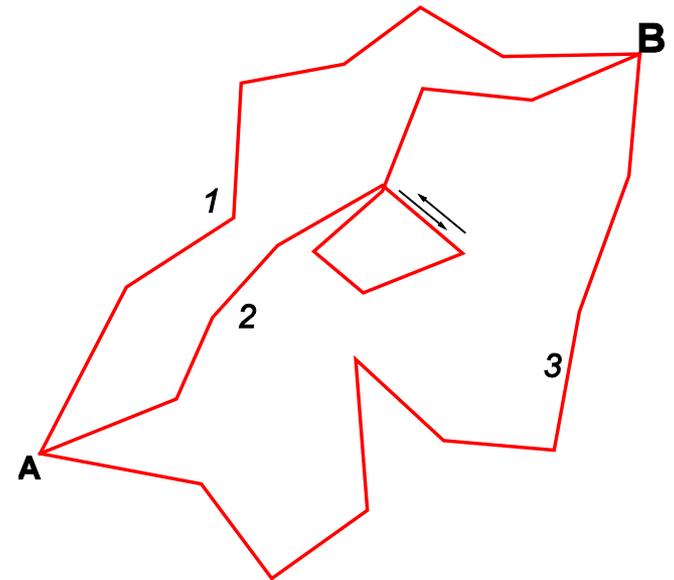
$$P(0 \rightarrow 0) = \sum_j P_j(0 \rightarrow 0) = 4 \sum_j t_j^2,$$

Двойка возникла из-за того, что одну и ту же траекторию мы посчитали дважды. Второй коэффициент 2 означает симметрию двух путей взаимно-обращенных по t .

Осмыслим результат: фазокогерентное сложение взаимно-обращенных по времени траекторий приводит к увеличению вероятности вернуться назад. Это часто называют “когерентное рассеяние назад” (coherent backscattering). Этот результат является основой слабой локализации (WL).

В реальной ситуации, траектории распространения электронных волн могут содержать петли самопересечения. Минимально возможная площадь таких петель $\sim l^2$, а максимально возможная площадь - $\sim l^2_\varphi$.

Этот диапазон площадей определяет диапазон магнитных полей, которые (вследствие нарушения симметрии обращения времени) подавляют слабую локализацию и восстанавливают Друдевское классическое значение проводимости.

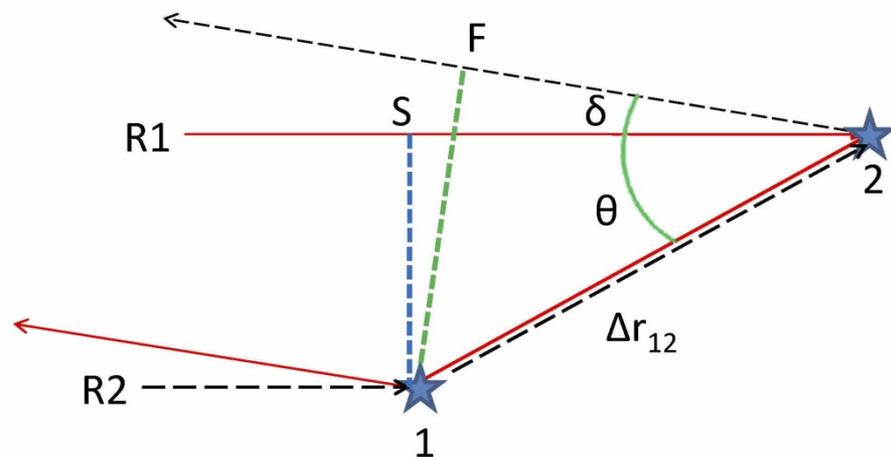


$$\sigma_{AB} = \sum P_i \quad \text{- classical}$$

$$\sigma_{AB} = |\sum \Psi_i|^2 = \sum |\Psi_i|^2 + 2\Psi_i\Psi_j \quad \text{- quantum}$$

7.05. В каком направлении происходит когерентное рассеяние

Выберем некоторый угол δ по отношению к направлению падающей волны и будем следить за всеми лучами отражающимися под углом δ . На рис. изображены два упругих рассеивателя (1 и 2) и плоская электронная волна, набегающая на них с левой стороны. Применим представления геометрической оптики.

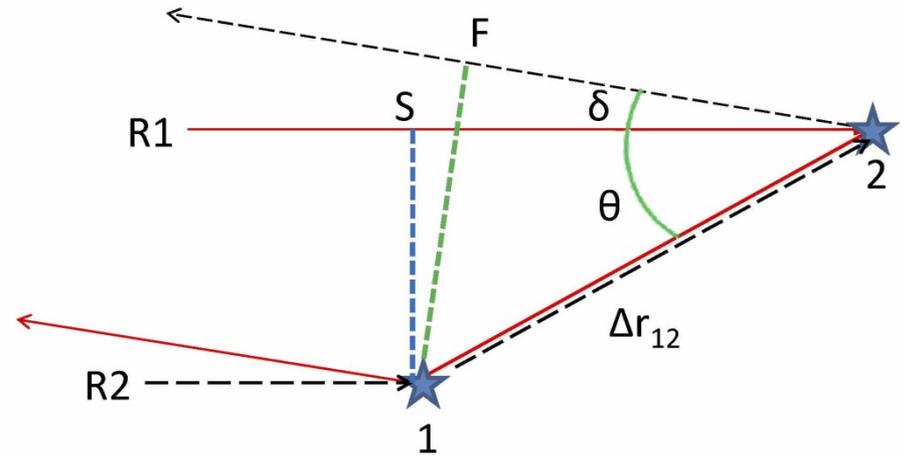


На линии $S - 1$ волна имеет плоский фронт (изображенный штриховой линией). Волна частично рассеивается непосредственно на каждом встреченном ей рассеивателе и возвращается назад. Кроме того, волна частично проходит и рассеивается на втором рассеивателе, отстоящем на расстоянии $\Delta r_{1,2}$ от первого и также поворачивает налево. Для того, чтобы найти полную волну, отраженную налево, надо просуммировать все отраженные волны с учетом их фаз.

Параллельные лучи $R1$ и $R2$ набегающего пучка с плоским фронтом. Чтобы учесть эффекты интерференции выберем некоторый угол δ по отношению к направлению падающей волны будем следить за всеми лучами отражающимися под углом δ . Луч $R1$ отражается в точке 2 и идет в точку 1, от которой отражается налево под углом δ .

ДЗ: найти диапазон углов, в котором происходит когерентное рассеяние назад

Луч $R2$ отражается от 1, попадает на 2 (т.е. идет противоположным путем лучу $R1$) и как мы предполагаем, отражается от 2 под углом δ . Начальная точка S для луча $R1$ и точка 1 для луча $R2$ находятся на линии одного волнового фронта. Как видно, первый луч проходит путь $S \rightarrow 2 \rightarrow 1$, а второй луч проходит путь $1 \rightarrow 2 \rightarrow F$. После этого, оба луча выходят под одним и тем углом δ . Разность длин путей $\Delta l_{1,2}$ для волн исходящих из точек 2 и 1 под углом δ равна:



$$\Delta l_{1,2}(\delta) = \Delta r_{1,2} [\cos \theta - \cos(\theta + \delta)]$$

Усредняя по углам δ после несложной но длинной тригонометрии получим

$$\langle \varphi_{1,2} \rangle \sim \frac{l_e}{\lambda_F} \langle \delta^2 \rangle,$$

где l_e - расстояние между рассеивателями. Волны двух лучей будут складываться конструктивно, если их фазы отличаются меньше чем $\pi/2$, т.е. $\langle \varphi \rangle < \pi/2$. Отсюда получаем условие на максимальный угол δ :

В диффузионном случае по определению $\lambda_F \ll l_e$, поэтому $\delta \ll 1$

$$\delta^2 \frac{l_e}{\lambda_F} < \pi/2$$

$$\delta < \sqrt{\frac{\lambda_F}{l_e}}$$

7.07. Влияние слабой локализации на проводимость

Для простоты, рассмотрим случай 2d системы. Для этого мы начнем с Эйнштейновского выражения для диффузии. Вспомним диффузионное уравнение и его решение - распределение плотности частиц в момент времени t :

$$n_{2d}(\vec{r}, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp(-r^2/4Dt) \sim \frac{n_0}{4\pi Dt}$$

Смысл его - это вероятность нахождения частиц в точке r в момент времени $t \gg \tau$.

Среднее расстояние на которое ансамбль частиц уйдет за время t от начала координат есть $l(t) = (Dt)^{1/2}$.

Отсюда объем, внутри которого может находиться электрон в момент времени t (из-за расплывания функции распределения) порядка $l^2 \sim (Dt)^{d/2} = Dt$.

Некоторые из электронов, в результате когерентного отражения назад, могут вернуться в начало координат. Объем, из которого электрон за время dt может попасть в начало координат, порядка $(\cos\theta)^2 \Delta S dt = (\lambda_F/l) \cdot l^2 dt = \lambda_F l dt = l v_F dt$.

Отношение этих двух объемов определяет относительное число электронов, которые побывали в начале координат за время dt за счет когерентного рассеяния назад, причем минимальное время, за которое электрон может вернуться назад - это τ , а максимальное время - это время сбоя фазы τ_ϕ . В результате

$$\frac{\delta\sigma_{2d}}{\sigma} \sim - \int_{\tau}^{\tau_\phi} \frac{v_F \lambda_F}{Dt} dt = \frac{v_F \lambda_F}{D} \ln \left(\frac{\tau_\phi}{\tau} \right) = - \frac{4\pi}{k_F l} \ln \left(\frac{\tau_\phi}{\tau} \right)$$

поскольку $D_{2d} = v_F^2 \tau/2$. Абсолютное значение поправки к проводимости

$$\Delta\sigma_{2d} \sim - \frac{2e^2}{h} \frac{\pi l}{\lambda_F k_F l} \frac{4\pi}{k_F l} \ln \left(\frac{\tau_\phi}{\tau} \right) = - \frac{2e^2}{h} \ln \left(\frac{\tau_\phi}{\tau} \right)$$

Если 2d система является пленкой толщины $b \ll l_\phi$, то

$$\frac{\delta\sigma_{2d}}{\sigma} \approx - \frac{1}{k_F l} \frac{1}{k_F b} \ln \left(\frac{\tau_\phi}{\tau} \right)$$

Для 1d системы (проволока диаметром $b \ll l_\varphi$)

$$\frac{\delta\sigma_{1d}}{\sigma} \approx - \left(\frac{1}{k_F b} \right)^2 \left(\frac{l_\varphi}{l} - 1 \right)$$

Все эти поправки отрицательные, они уменьшают проводимость. Видно, что слабая локализация дает максимальный эффект в 1d системе. При понижении температуры l_φ растет как $1/T$ и поправки расходятся.

Q: Станет ли проводимость отрицательной в пределе $T \rightarrow 0$?

Для 1d системы (проволока диаметром $b \ll l_\varphi$)

$$\frac{\delta\sigma_{1d}}{\sigma} \approx - \left(\frac{1}{k_F b} \right)^2 \left(\frac{l_\varphi}{l} - 1 \right)$$

Все эти поправки отрицательные, они уменьшают проводимость. Видно, что слабая локализация дает максимальный эффект в 1d системе. При понижении температуры l_φ растет как $1/T$ и поправки расходятся.

A: Проводимость отрицательной не станет, поскольку наше диффузионное рассмотрение справедливо лишь для $l \gg \lambda_F$. Когда из-за роста l_φ при понижении температуры будет достигнут этот предел по длине пробега, то система перейдет в локализованное состояние, в котором проводимость при конечной температуре определяется другими физическими процессами – термоактивацией и туннелированием, а не диффузией.

Для 3d системы эффект слабой локализации минимален

$$\frac{\delta\sigma_{3d}}{\sigma} \approx - \frac{1}{k_F^2 l} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_\varphi} \right)$$

Вывод WL поправки к проводимости через поправку к коэффициенту диффузии

Когерентное отражение назад уменьшает коэффициент диффузии на величину ΔD . Воспользуемся формулой Кубо для корреляций скорость-скорость:

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt.$$

Мы хотим вычислить поправку к D из-за корреляции в рассеянии назад в малом интервале углов. Отрицательную добавку в коэффициент диффузии можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta D \approx & -\langle v_F v_F \cos(\delta_{\max}) P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle = \\ & -\langle v_F^2 \delta_{\max}^2 P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь $|v_x(t)| \sim |v_x(0)| \sim v_F$, $\Delta S(r = 0)$ - некоторая площадь вокруг точки $r = 0$ и усреднение $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по всем направлениям падающего луча.

Усреднение по всем углам дает обратную размерность пространства $1/d$ - вспомним формулу для коэффициента классической диффузии $D = (1/d)v_F^2 \tau$.

Вывод WL поправки к проводимости через поправку к коэффициенту диффузии

Когерентное отражение назад уменьшает коэффициент диффузии на величину ΔD . Воспользуемся формулой Кубо для корреляций скорость-скорость:

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt.$$

Мы хотим вычислить поправку к D из-за корреляции в рассеянии назад в малом интервале углов. Отрицательную добавку в коэффициент диффузии можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta D \approx & -\langle v_F v_F \cos(\delta_{\max}) P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle = \\ & -\langle v_F^2 \delta_{\max}^2 P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle. \end{aligned}$$

Максимальный угол предполагается малым (рассеяние назад, поэтому возникает δ_{\max}^2). Кроме того, мы записали вероятность возвращения “назад в исходную точку” $x = 0$ как $P_{\text{return}}(\Delta S(r = 0))$, поскольку это и есть вычисляемая добавка из-за возвращения назад.

Теперь надо договориться, что мы будем называть возвращением назад. Разумно это определить как классическая вероятность $P_{\text{return}}(\Delta S(r = 0))$ для частицы, стартовавшей в точке $r = 0$ вернуться в пределы некоторой площади ΔS вокруг точки $r = 0$, причем вернуться в пределах некоторого характерного времени. Точка исхода, конечно, выбрана произвольно. Вероятность вернуться назад за все времена равна

$$P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) = \Delta S C_{\text{return}} = \Delta S \int_0^{\infty} C(0, t) dt = \Delta S \frac{1}{n_0} \int_0^{\infty} n(0, t) dt,$$

где $n(0, t)$ - расплывающееся во времени распределение частиц, описывающее вероятность вернуться назад в точку начала в момент времени t . Мы уже это вычисляли для 2D системы:

$$n_{2d}(r, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \sim \frac{n_0}{4\pi Dt}$$

Теперь надо из физики проблемы обрезать времена. Ясно, что нельзя вернуться назад в результате интерференции за время меньше τ_e . Можно было бы резко обрезать нижний предел интегрирования, но из-за статистической природы диффузии лучше это сделать добавив множитель $(1 - \exp(-t/\tau_e))$ в коэффициент C_{return} . Надо также обрезать времена, большие чем τ_φ множителем $\exp(-t/\tau_\varphi)$.

Для простоты мы все же нагло обрежем пределы интегрирования вместо культурного сглаживания на краях. Оценим ΔS -площадь для возврата. Ясно, что у нас есть один параметр длины l_e , поэтому $\Delta S \sim l_e^2$. Подставим эти все куски в предыдущие формулы, получим

$$\Delta D_{2d} \approx - \frac{\overbrace{l_e^2}^{\lambda_F/l_e} \underbrace{v_F^2}_{(1/2) v_F^2 \tau} \underbrace{\delta_{max}^2}_{(1/2) v_F^2 \tau}}{8\pi D} \int_{\tau_e}^{\tau_\varphi} \frac{1}{t} dt \propto \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau_e} \right)$$

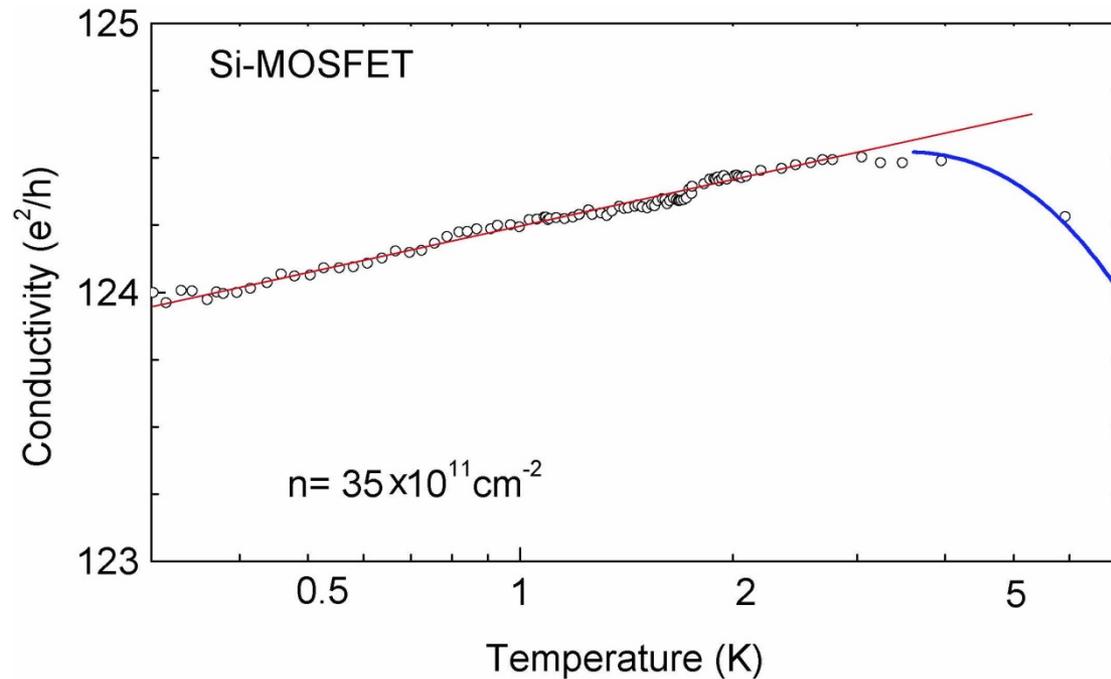
Окончательное выражение для WL поправки к проводимости $\sigma_{2d} = e^2 \nu_{2d} D_{2d}$

$$\Delta \sigma_{2d} = - \frac{e^2}{2\pi \hbar} \ln \left(\frac{\tau_\varphi}{\tau_e} \right)$$

Если электронная система имеет g_v долин, вклады от разных долин конструктивно складываются (если на временах τ_φ не происходит междолинное рассеяние) и амплитуда WL должна быть в g_v раз больше.

Проводимость для образца Si-МДП в диапазоне температур (0.3 – 7)К.

V.M. Pudalov, G. Brunthaler, A. Prinz, and G. Bauer, Phys. Rev. B 60 2154 (1999).

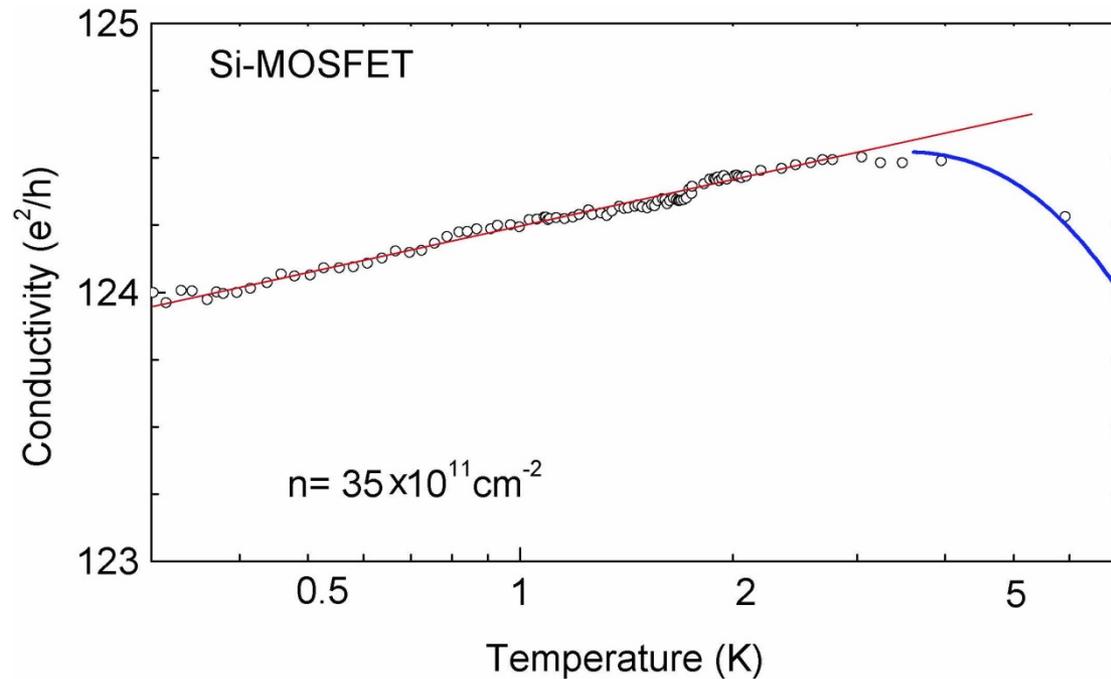


Концентрация электронов выбрана столь высокой, что эффекты е-е взаимодействия в диффузионном режиме не очень заметны на фоне слабой локализации.

Видно, что Т- зависимость проводимости логарифмическая и имеет правильный порядок $\sim e^2/h$. Для $g_v=2$ проводимость должно изменяться на $2e^2/h$ при изменении температуры в е-раз, или, на $4.6e^2/h$ при изменении температуры на порядок. В эксперименте, однако проводимость изменяется почти на порядок слабее, всего на $0.5e^2/h$ при изменении температуры от 0.3 до 3К.

Проводимость для образца
Si-МДП в диапазоне температур
(0.3 – 7)К.

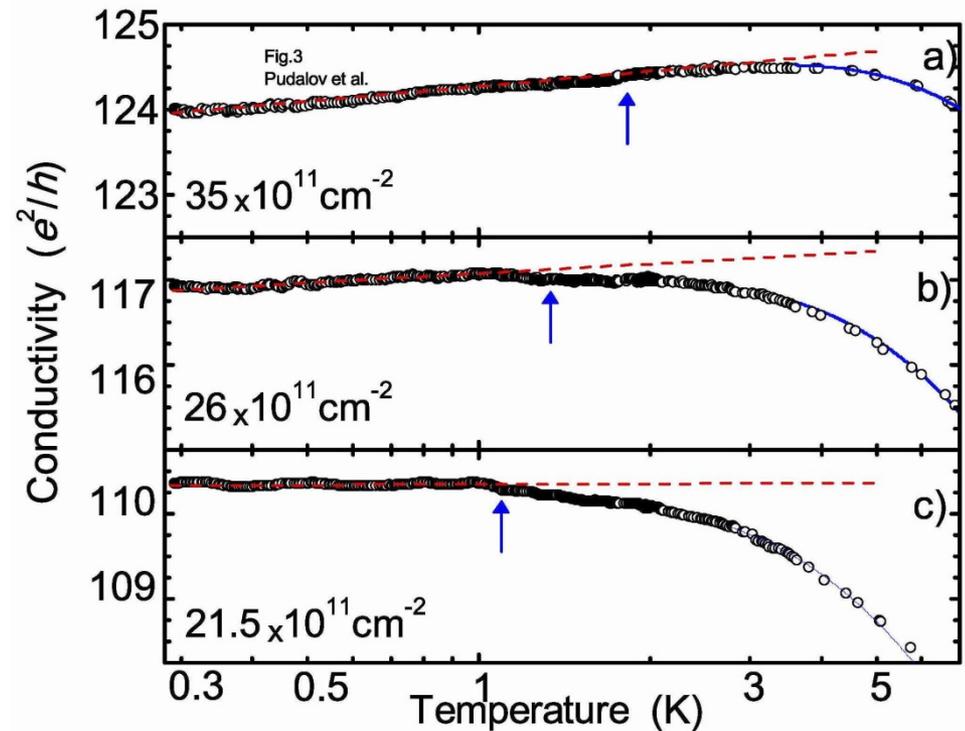
V.M. Pudalov, G. Brunthaler, A.
Prinz, and G.Bauer, Phys. Rev. B 60
2154 (1999).



Это является следствием остаточного вклада эффектов электрон-электронного взаимодействия, которые дают аналогичную логарифмическую температурную зависимость проводимости, но противоположного знака. Эффекты электрон-электронного взаимодействия, однако, мы пока не обсуждаем.

Чтобы убедиться в правильности нашей интерпретации, рассмотрим эволюцию $\delta\sigma(T)$ при изменении и концентрации.

При уменьшении n наклон $\ln(T)$ зависимости резко уменьшается. Это доказывает присутствие еще одного механизма, который дает поправку другого знака.



7.08. Влияние перпендикулярного магнитного поля

В магнитном поле возникает разность фаз для сопряженных волн, распространяющихся вдоль замкнутой петлевой траектории в направлении по и против часовой стрелки. Для сопряженных волн $d\mathbf{r} = -d\mathbf{r}$ и кинетический импульс $\mathbf{p} = -\mathbf{p}$.

Поскольку $k = (1/\hbar)p = (1/\hbar)[mv - (e/c)A]$, находим

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 &= \frac{1}{\hbar} \oint d\bar{r}_1 \left(\bar{p}_1 + \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{1}{\hbar} \oint d\bar{r}_2 \left(\bar{p}_2 + \frac{e}{c} \bar{A} \right) \\ &= \frac{2e}{\hbar c} \oint \bar{A} d\bar{r}_1 = \frac{4\pi\Phi}{\Phi_0}\end{aligned}$$

Интерференционная компонента от каждой траектории поэтому осциллирует с магнитным полем. Однако, магнитные потоки, которые пронизывают контуры, различны, так что интерференция случайна. В результате общий интерференционный вклад в проводимость будет уменьшаться с полем начиная с поля

$$Bl_\varphi^2 \approx \Phi_0$$

$$B_\varphi = \frac{\hbar c}{eD\tau_\varphi}$$

Более подробные вычисления приводят к следующему выражению, известному как формула Хиками-Ларкина-Нагаоки:

$$\Delta\sigma_{xx} = -\frac{\alpha g_{\nu} e^2}{2\pi^2 \hbar} \left[\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\tau} \right) - \Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\tau_{\varphi}} \right) \right]$$

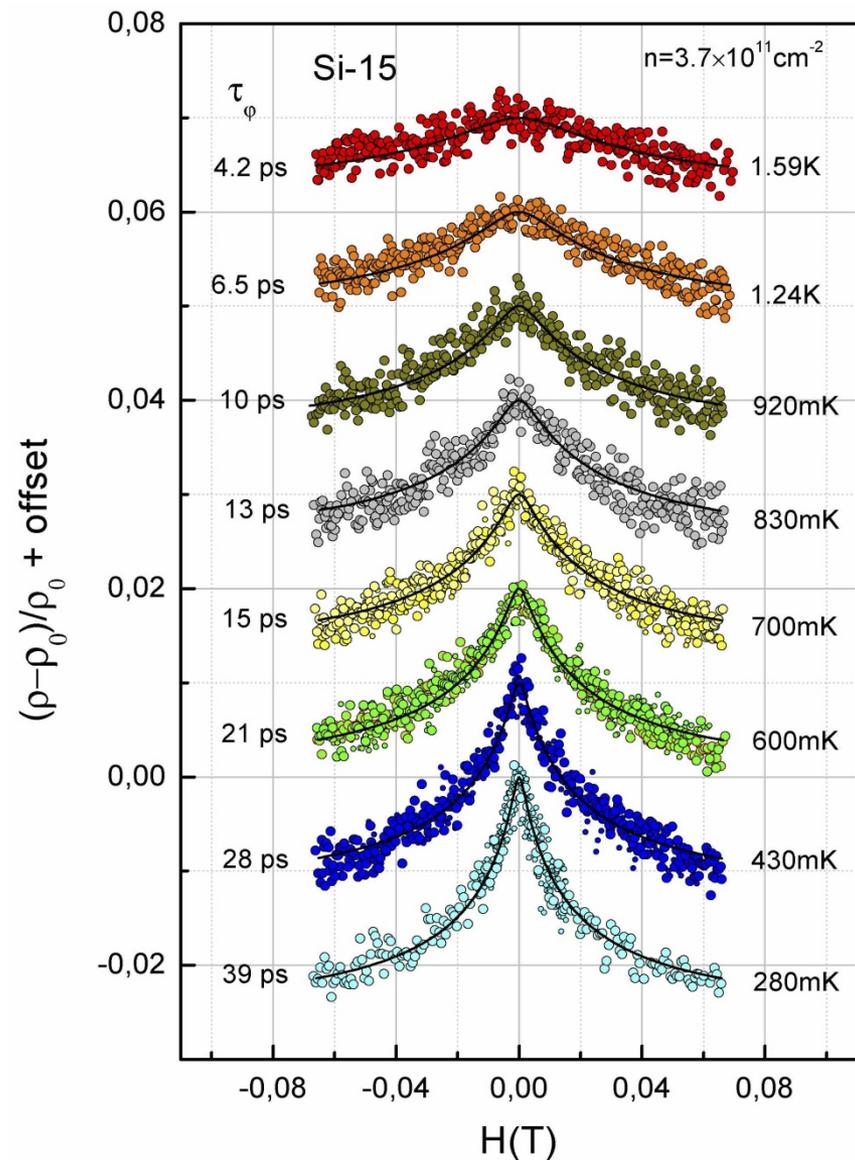
где Ψ - Digamma функция от приложенного магнитного поля B , $a = \hbar/4eBD$ и D коэффициент диффузии. В этой формуле имеются два характерные значения поля –

(1) B_{φ} и

(2) “транспортное поле” $B_{tr} = \hbar c/(4eD\tau)$. Первое значение поля определяет диапазон почти квадратичного изменения сопротивления – макушку кривой слабой локализации.

Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить τ_φ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения $\rho(B_\perp)$ в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение τ , хотя, на практике, это оказывается не просто.

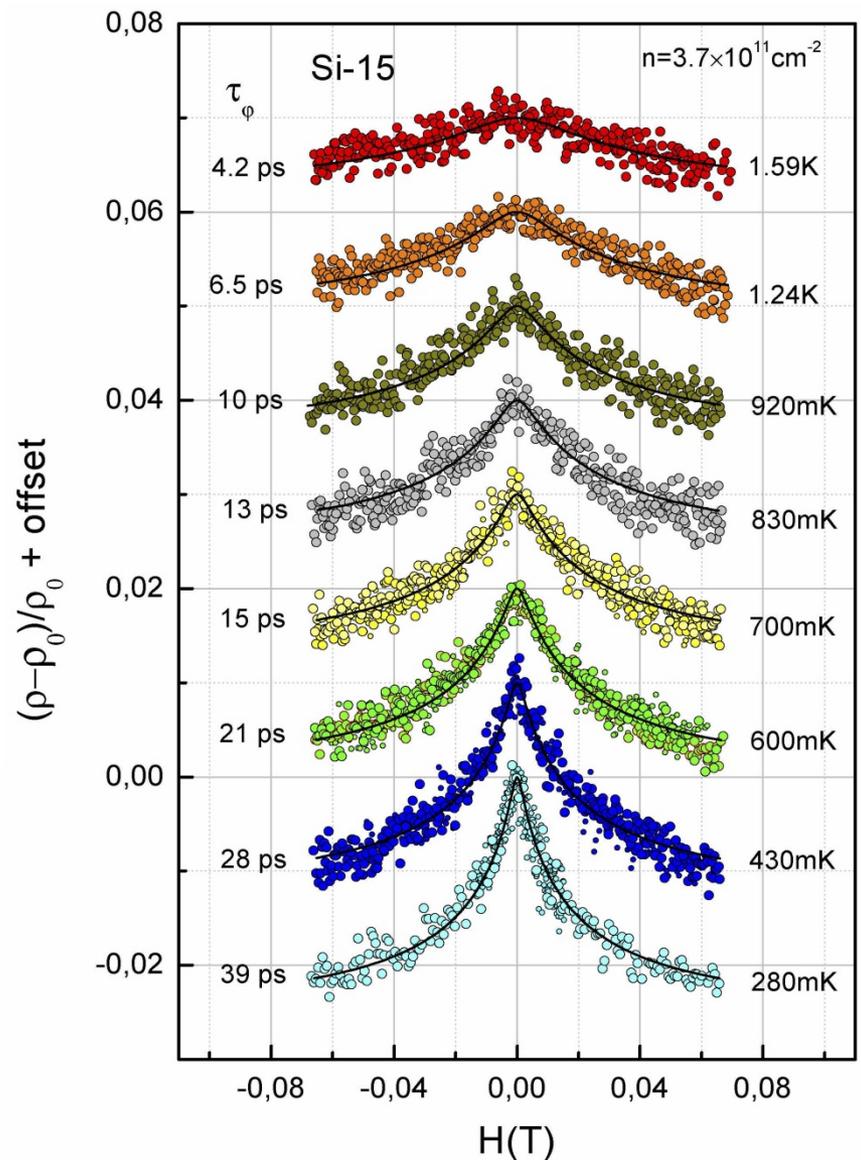
Q: Как определить в эксперименте значения D и τ ?



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 87, 096802 (2001)

Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить τ_ϕ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения $\rho(B_\perp)$ в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение τ , хотя, на практике, это оказывается не просто.

A: Из измерений эффекта Холла в слабом поле определяем концентрацию электронов n , из нее k_F и v_F , откуда $D = (1/d)v_F^2\tau$. τ находим из T -зависимости сопротивления при низких температурах, в отсутствии фононов и в условиях вырожденной системы $T \ll T_F$.



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 87, 096802 (2001)

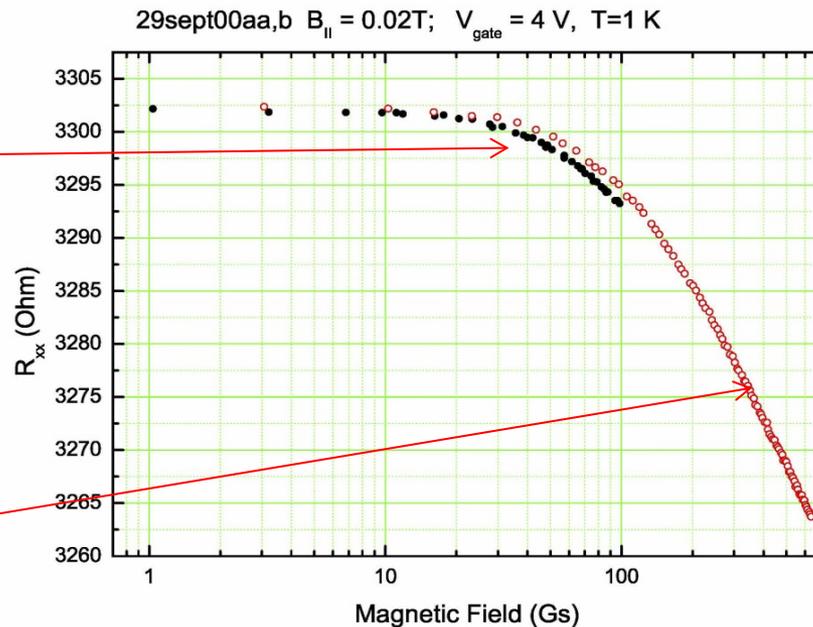
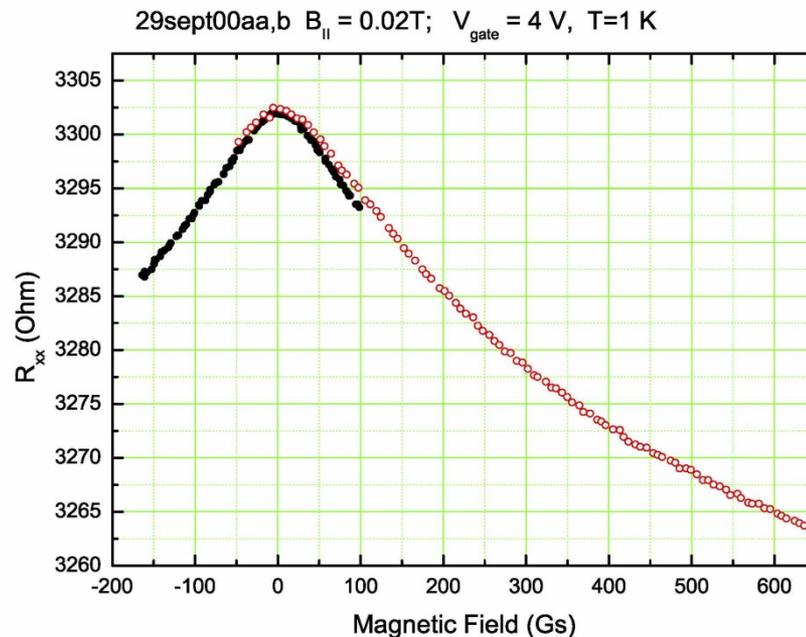
Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить τ_φ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения $\rho(B_\perp)$ в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение τ , хотя, на практике, это оказывается не просто.

Два характерных поля

(1) B_φ Это значение поля определяет диапазон почти квадратичного изменения сопротивления – макушку кривой слабой локализации.

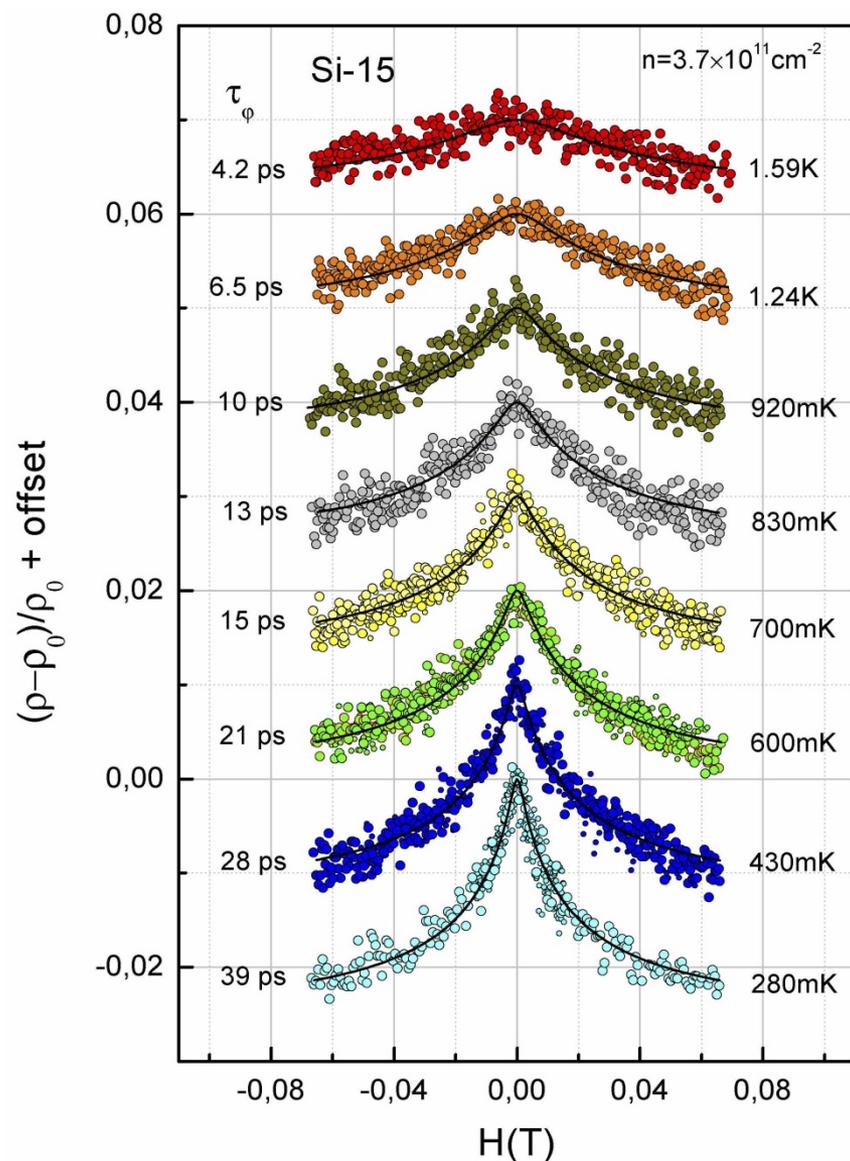
и

(2) “транспортное поле” $B_{tr} = \hbar c / (4eD\tau)$.



Префактор g_v описывает долинное вырождение ($g_v = 2$ для плоскости (100) Si) и α зависит от отношения внутридолинной к междолинной скорости рассеяния и должно лежать в интервале от 0.5 до 1.

В данном примере для α было найдено значение от 0.55 до 0.8, т.е. в ожидаемом диапазоне.



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 87, 096802 (2001)

Зависимость τ_φ от проводимости и от температуры вычисляется в микроскопической теории. Есть два механизма рассеяния:

(1) e-ph - доминирует при высоких T и дает $\tau_\varphi \propto 1/T^2$

(2) e-e рассеяние в пределе малого переносимого импульса (низкие T) дает зависимость $\tau_\varphi \propto 1/T$

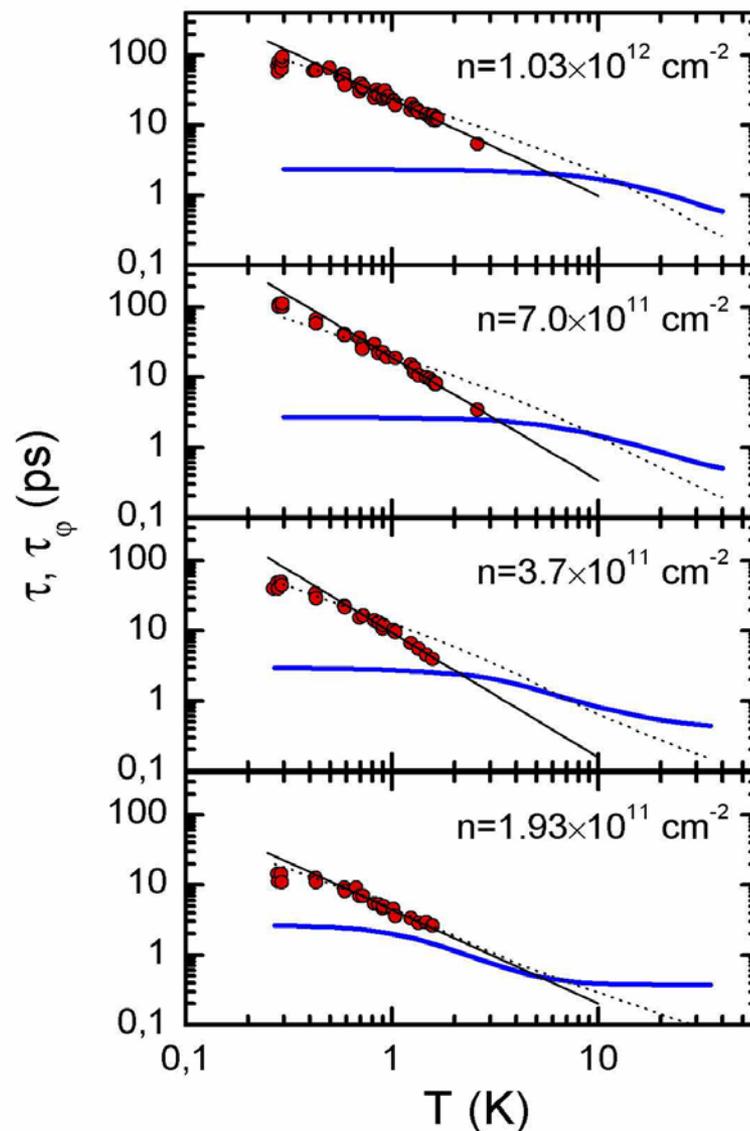
$$\tau_\varphi = \frac{\hbar g}{2\pi k_B T \ln(g/2)},$$

где g - безразмерная проводимость в единицах e^2/h . Проблема, вроде бы, возникает при малых значениях g , поскольку $\ln(g/2)$ стремится к нулю когда $g/2$ приближается к 1. На самом деле, это теоретическое описание справедливо только для $g \gg 1$.

Когда g становится порядка 1, отношение $g/\ln(g/2)$ следует заменить членом порядка единицы.

Измеренная и вычисленная
зависимость $\tau_\phi(T)$.
Пунктирная линия представляет
теоретически ожидаемое поведение
 $\tau_\phi \propto T^{-p}$

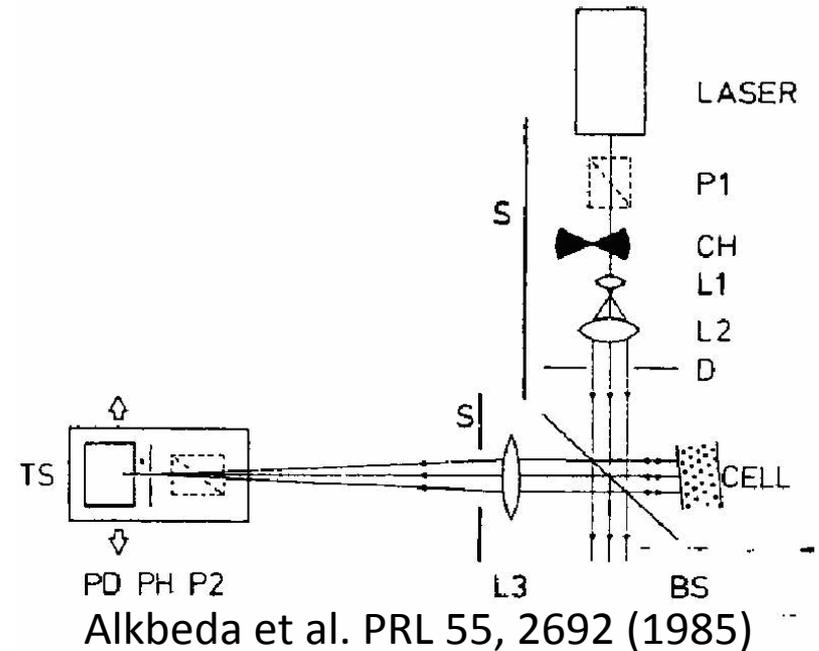
На Рисунке поведение $g/\ln(g/2)$ в
диапазоне $10 \leq g \leq 100$ фитировано
полиномом второго порядка и получена
зависимость $f(g) = 3.78 + 0.253g - 0.00036g^2$
для аппроксимации g к малым значениям.



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, V.M.
Pudalov, PRL 87, 096802 (2001)

7.09. Когерентное рассеяние света

Ясно, что когерентное рассеяние назад могут претерпевать любые волны в диффузной среде- акустические, оптические и т.д. В отличие от электронных волн, однако, нет такого замечательного инструмента как магнитное поле и эффект Ааронова-Бома для влияния на WL. Остается единственный признак когерентного рассеяния - узкий конус углов рассеяния назад

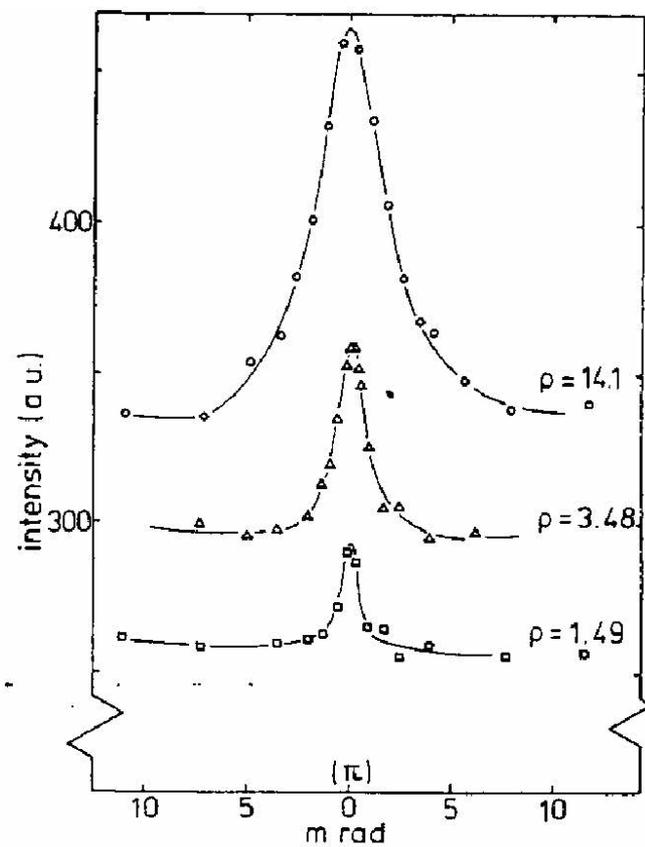


$$\delta_{cone} = 2\delta_{max} \sim \sqrt{\lambda_F/l_e}$$

- Так было для электронов, а для фотонов
- $(\lambda/l)^{1/2}$

излучение He-Ne лазера посылается через расщепитель луча (50%) на мутную среду из полистириновых или латексных шариков $\sim 1\mu\text{м}$ диаметром. Отраженный луч регистрируется фотодетектором. Положение фотодетектора можно изменять в пространстве, и измерить зависимость отраженного света от угла.

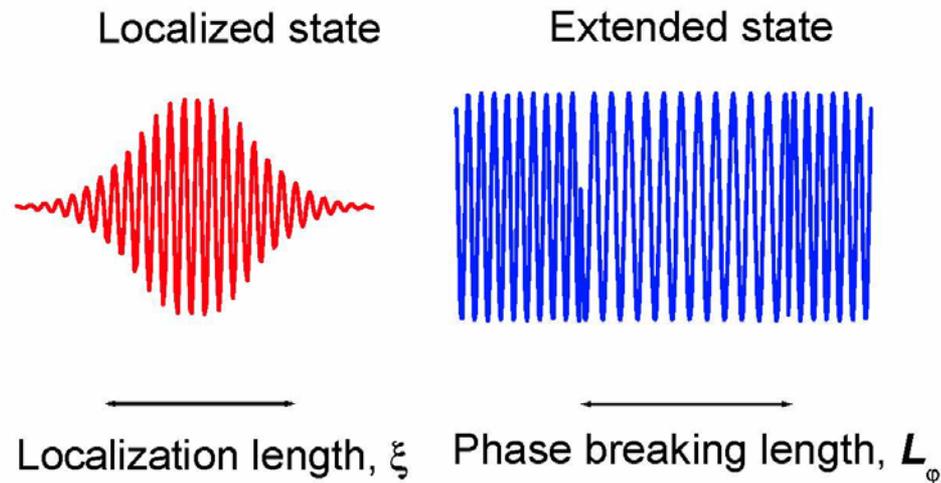
Результаты измерений
положения фотодетектора



Когерентное рассеяние света назад в разупорядоченной среде -
водной эмульсии из 1мкм глобул латекса.

7.10. Переход метал-изолятор

Под этим термином мы подразумеваем такие переходы, которые происходят без изменения симметрии или параметров решетки и являются чисто электронными. Что изменяется при переходе – это характер волновой функции, которая может быть локализованной или делокализованной, как схематически поясняет рисунок.



(1) Локализованное состояние может иметь большой радиус локализации, порядка размеров образца, поэтому в образцах конечных размеров или при конечной T (о трудно отличить локализованное состояние от делокализованного.

(2) Ясно, что такое физическое определение металла и изолятора резко отлично от обыденного или технического определения. Т.о., лишь при $T = 0$ можно определить тип состояния – металл или изолятор. Это затрудняет экспериментальные исследования перехода металл-изолятор.

Для теории это явление интересно как пример непрерывного квантового перехода, происходящего под действием различных управляющих параметров. В простейшем случае управляющим параметром является беспорядок – например, концентрация примесей.

Экспериментаторы прекрасно знают, что слабо легированный Si, хотя и является (плохим) проводником при комнатной температуре, но становится изолятором при охлаждении до азотных или гелиевых температур.

Труднее понять как обстоит дело с сильно легированным кремнием - ведь его проводимость не исчезает при температурах жидкого гелия.

Еще труднее дать ответ в том случае, когда управляющими параметрами являются межэлектронное взаимодействие или комбинация беспорядка и взаимодействия, которые нельзя рассматривать независимо друг от друга.

Минимальная металлическая проводимость

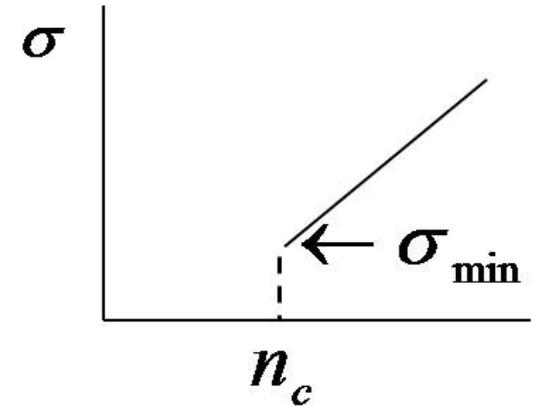
Диффузионное описание Друде применимо, пока длина пробега $l_{tr} \gg \lambda_F$. По мере увеличения беспорядка, l_{tr} уменьшается. В связи с этим возникает вопрос: что будет с проводимостью при нарушении этого соотношения. Ответ дан А.Ф.Иоффе и его молодым сотрудником А.Р. Регелем [Prog. Semicond. 4, 237 (1960)]: длина пробега при диффузионном движении не может быть много меньше λ_F .

$$l_{tr}^{min} \sim \frac{1}{k_F}$$



$$\sigma_{min}^{(2D)} = \frac{e^2}{h}$$

Пусть уменьшение проводимости происходит за счет увеличения беспорядка (например, концентрации примесей), тогда



Соответствующая модель перехода металл-изолятор в системе со случайным беспорядком была сформулирована Андерсоном и переход называется переходом Андерсона.

Переход Андерсона - это **квазиклассическая** модель перехода металл-изолятор под действием беспорядка. Вследствие пренебрежения волновыми свойствами электронов из результата выпала размерность.

Ясно, что этот переход наиболее четко выражен при $T \rightarrow 0$, т.е. это квантовый фазовый переход.

7.11. Скейлинговое описание проводимости: **учет волновых свойств**

Сформулировано Abrahams, Anderson, Licciardello, Ramakrishnan ('79); в основе также лежат результаты Wegner ('79), Thouless ('74,'77)

Скейлинговая теория пытается описать проводимость и явление локализации, рассматривая эволюцию кондактанса G при изменении размеров системы L .

Уточним картину: электрон движется в среде со случайными рассеивателями. Фаза его волновой функции изменяется случайно.

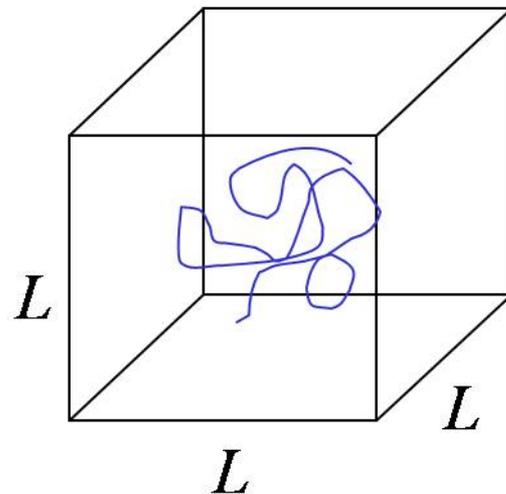
Идея преобразования ренормализационной группы состоит в следующем: рассмотрим блок размерами $L \times L \times L$ и будем следить за эволюцией кондактанса системы G по мере изменения L от микроскопического масштаба l_{tr} к макроскопическому L . Составляя вместе кубики размера l_{tr} мы придем в конце концов к системе больших размеров.

Гипотеза скейлингового описания состоит в том, что предполагается существование такой универсальной функции β , которая описывает эволюцию кондактанса при масштабировании размеров системы (G обезразмерено в единицах e^2/h):

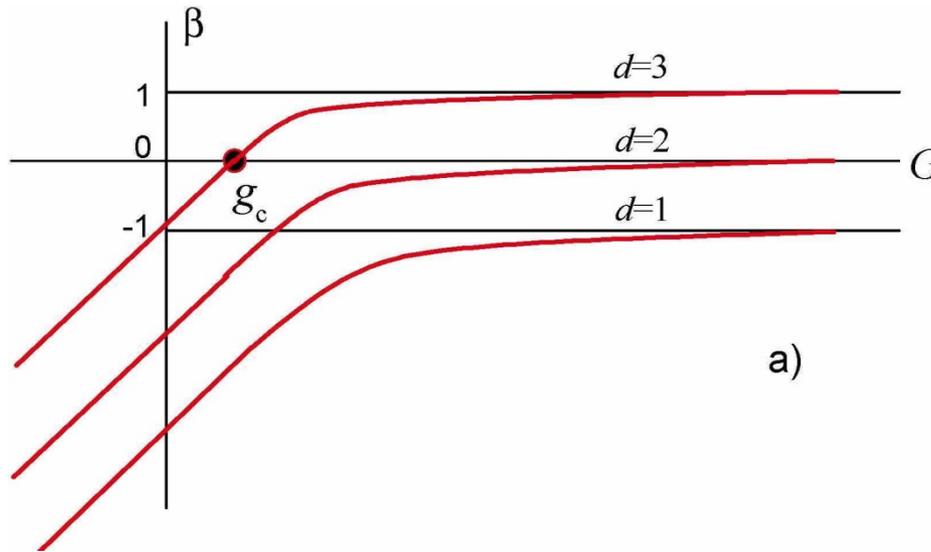
$$\frac{d \ln G}{d \ln \xi} = \beta(G), \quad \text{где } \xi = \frac{L}{l_{tr}}$$

и эта β -функция зависит только от кондактанса G . Попробуем сконструировать β -функцию из простых соображений. Рассмотрим процесс диффузии квантовой частицы. Ее квазиклассическая траектория движения схематически изображена на рисунке.

Для блока размерами $l_{tr} < l_\varphi$ квантовые интерференционные поправки к проводимости несущественны и значение кондактанса просто определяет начальную точку на искомой кривой $\beta(g)$. Пусть эта начальная точка отвечает малому беспорядку и, следовательно, большому значению $G \gg 1$.

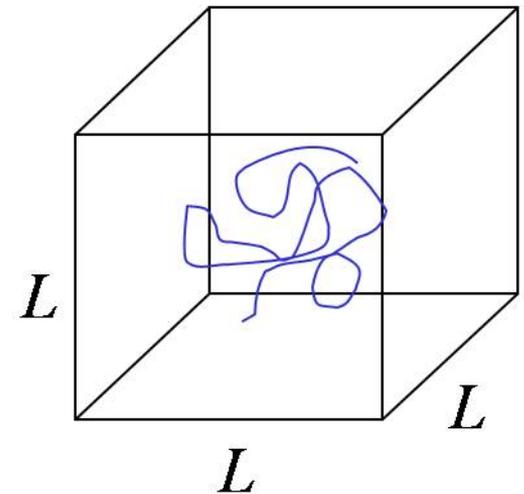


Для блока размерами $l_{tr} < l_\phi$ квантовые интерференционные поправки к проводимости несущественны и значение кондактанса просто определяет начальную точку на искомой кривой $\beta(g)$. Пусть эта начальная точка отвечает малому беспорядку и, следовательно, большому значению $G \gg 1$. В асимптотике $G \rightarrow \infty$ для начальной точки $L = l_{tr}$ на кривой $\beta(G)$ мы обязаны получить очевидный классический результат $G \propto L^{d-2}$, где d – размерность системы.



$$\frac{d \ln G}{d \ln \xi} = \beta(G), \quad \text{где } \xi = \frac{L}{l_{tr}}$$

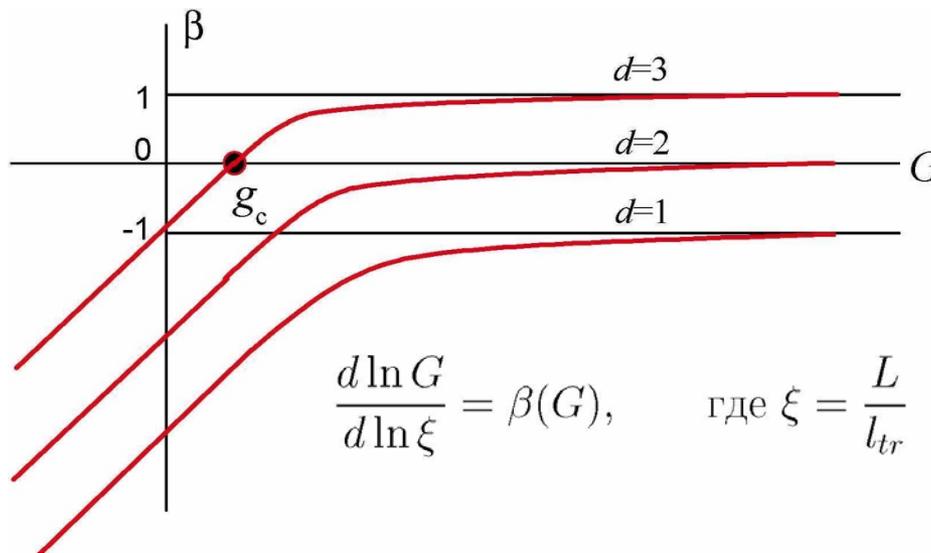
Три горизонтальные линии показывают $\beta = -1, 0, 1$ для асимптотики G в классическом пределе для систем с размерностью $d=1, 2$ и 3 , соответственно. При увеличении размера L мы имеем дело с диффузионным транспортом; поэтому G будет слегка меньше классического значения, отличаясь от него на квантовую интерференционную поправку.



Для размерности $d = 3$ изображающая точка будет двигаться направо, в сторону больших G , поскольку $\beta^{(3)} > 0$.

Для $d = 1$ функция $\beta^{(1)}$ всегда < 0 и с увеличением L изображающая точка движется налево, в сторону уменьшения G . Это отвечает интуитивным соображениям о невозможности металлического состояния в одномерной системе.

Для $d = 2$ ситуация более деликатная. В классическом пределе $G \rightarrow \infty$ функция $\beta^{(2)} = 0$ и поэтому является крайне чувствительной к допущениям сделанным в теории.



В квантовой модели невзаимодействующих электронов $\beta^{(2)} \approx 0$ и квантовые интерференционные поправки делают ее отрицательной; поэтому, с увеличением L изображающая точка движется налево в сторону уменьшения G .

Для $d = 1, 2$, а также для разупорядоченной системы $d = 3$ изображающая точка оказывается в области $\beta < 0$, поэтому при увеличении L и соответствующем уменьшении проводимости должен наступить прыжковый режим транспорта и экспоненциальное поведение проводимости $G \propto \exp(-L/L_0)$. Такое поведение отвечает линейное уменьшение β с $\ln G$ на рисунке для любой размерности.

Несколько важных замечаний.

(1) Во первых, в скейлинговой теории физический смысл имеет не геометрический размер образца, а квантовая длина $L \sim L_\varphi$. Поэтому эффективную “длину” можно изменять путем изменения температуры
 $L \propto T^{-\rho}, \rho \sim 1$.

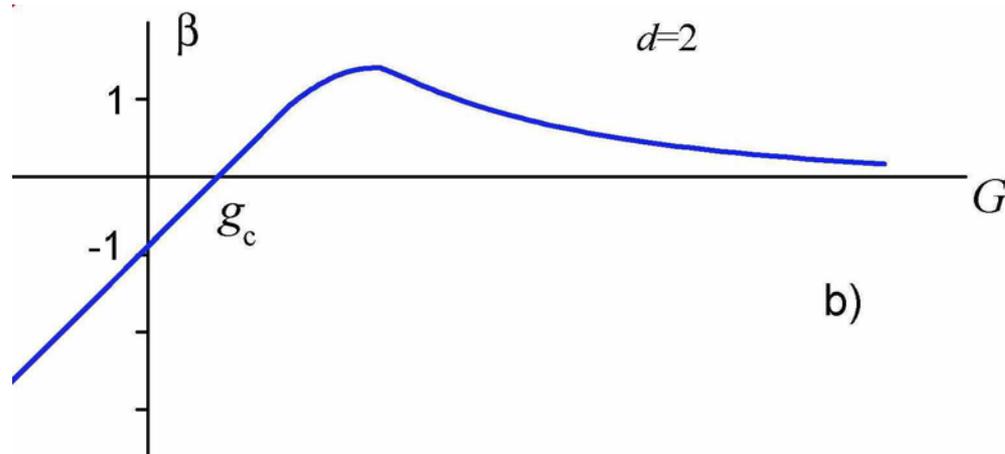
(2) Во вторых, именно в пределе $T = 0$ определено отличие между истинно металлическим состоянием и состоянием изолятора. Как видно из рисунка, металлического состояния не существует в системе с размерностью $d < 3$.

Для $d = 1$ этот вывод остается неизменен при учете различных взаимодействий в системе.

Для $d = 2$, ввиду близости $\beta^{(2)}$ к нулю, учет межчастичных взаимодействий (которыми пренебрегает скейлинговая теория) может кардинально изменить вывод о невозможности металлического состояния.

(3) В качестве примера сказанному на рисунке показано схематическое поведение $\beta(2)$ для модельной системы, в которой многочастичные эффекты проявляются только в виде спин-орбитального рассеяния.

Как видно, в этой модели знак скейлинговой функции изменяется.



Эта модель довольно искусственна, потому что при учете СО взаимодействия, в этом же порядке по теории возмущений следует учитывать также e - e взаимодействие. Последнее во всех случаях изменяет β -функцию более сильно, чем СО взаимодействие.

Однако, задача о взаимодействующих электронах является более сложной и в принципе не может описываться скейлинговой функцией только одного параметра. Это существенно двухпараметрическая задача (беспорядок и взаимодействие).

(4) В случае $d = 3$ скейлинговая функция изменяет знак в некоторой точке G_c , которая является критической отталкивающей точкой квантового перехода металл-изолятор (по беспорядку, при $T = 0$).