# Глава 5

# Основные типы твердых тел

# 5.1 Электронные состояния в кристаллах

Предполагается, что уже знакомы: Схема заполнения электронных оболочек атомов Задача о частице в потенциальной яме Уравнение Шредингера Кратность вырождения Статистика Ферми-Дирака Принцип (запрет) Пули. Напомнить: Схема энергетических уровней атома Н и атома Li.

Рассмотрим систему N изолированных друг от друга атомов. Они имеют электронные оболочки с числом уровней  $g_n$ на каждой *n*-ой оболочке.

Когда атомы сближаются при образовании твердого тела, то:

• Электронные оболочки атомов начинают перекрываться. Взаимодействие между ними является возмущением первоначальных атомных уровней энергии. Это возмущение нарушает изначальную симметрию состояний в изолированных атомах и вследствие этого уровни энергии расщепляются. В результате, изначально сильно вырожденный атомный уровень энергии превращается в большое число близко расположенных уровней энергии в твердом теле (энергетическая зона).

- Одновременно с этим "расплыванием" уровни энергии в среднем смещаются вниз, поскольку образование конденсированного состояния энергетически выгодно.
- Больше всего возмущены электроны оболочек наиболее удаленных от ядра (т.е. валентные электроны), так как они ближе всего к соседним атомам.
- Равновесное состояние решетки должно соответствовать минимуму энергии. Дальнейшее сближение должно быть невыгодно, т.е. энергия должна расти.
- Электронные состояния в твердом теле должны непрерывно деформироваться, но их число должно оставаться тем же, что и число состояний в исходной системе изолированных атомов. Следовательно, в *s*-полосе должно быть 2*N* уровней (по 2 электрона на атом), в *p*-полосе -6*N* (6 электронов на атом), в *d*-полосе 10*N*и т.д.

Эти все обстоятельства отражены на схематической диаграмме Рис. 5.1.

Вопросы для проверки:

В чем причина отталкивания атомов при сжатии твердого тела?

В чем причина подвижности валентных электронов в металле?



Рис. 5.1: Энергия электронов на разных энергетических уровнях в зависимости от расстояния между атомами (от газа свободных атомов до твердого тела)

Вследствие перекрывания волновых функций происходит быстрый переход электрона от атома к атому. Этому процессу соответствует трансляционный импульс и кинетическая энергия. Полная энергия  $E_{\rm tot}$ 

$$E_{\rm tot} \approx E_{\rm pot} + E_{\rm kin}$$

происходит из уровней энергии электрона на атомной орбите  $E_{\text{atomic}}$  в свободном атоме, но конечно, им не соответствует, поскольку волновые функции электрона деформированы.

 $E_{\rm pot}$  больше или меньше  $E_{\rm atomic}$  ?



Плотность состояний и энергия Ферми

Рис. 5.2: Зависимость плотности состояний от энергии

Рентгеновская фотоэмиссия. (XRF – X-ray fluorescence). Поверхность твердого тела (или газ) бомбардируется электронами высокой энергии, γ-излучением или жестким рентгеновским излучением. Падающий электрон выбивает с орбиты атома один из внутренних электронов. Образовавшуюся вакансию занимает один из электронов с более удаленных оболочек (см. Рис. 5.1). При этом переходе происходит испускание характеристического ренгеновского излучения.

Пусть, например, выбивается 1*s*-электрон, как изображено на Рис. 5.4. Образовавшуюся вакансию занимает один из электронов с более удаленных оболочек, например 2*p* – см. Рис. 5.4.

В изображенном случае длина волны излучения  $2p \rightarrow 1s \approx 12000$ Å соответствует переходу в решетке с энергией 1эВ. Эмиссия характеристического "вторичного" (или флуоресценции) рентгеновского излучения широко используется для элементного и химического анализа.



Рис. 5.3: Схема переходов с испусканием характеристического излучения

# 5.2 Металлические кристаллы

Na, Al, Cu, Ag, Au, Zn, Sn, In и т.д.

### 5.2.1 Ионные кристаллы

NaCl. MgO, LiF и т.д.

### 5.2.2 Ковалентные кристаллы

С, Si, Ge, GaSb и т.д.

### 5.2.3 Молекулярные кристаллы

Ar, Kr, Xe, нафталин, антрацен, тетрацен, пентацен, рубрен и т.д.



Рис. 5.4: Схема испускания рентгеновского излучения при переходе электрона между внутренними оболочками в Na (твердом или газообразном)

## 5.3 Решетка Браве

Р.Б. это бесконесная периодическая стуктура, образованная всми точками с радиус-векторами

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_s \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \tag{5.1}$$

где векторы  $\mathbf{a}_i$ , называемые основными векторами решетки не лежат в одной плоскости, а -  $n_i$  – все возможные целые числа.

Для всякой заданной кристаллической решетки выбор векторов  $\mathbf{a}_i$  неоднозначен.

### 5.3.1 Примитивная ячейка

Примитивная ячейка или примтивная элементарная ячейка – это такой объем решетки, который генерирует всю пространственную решетку при всех трансляциях на вектора линецные комбинации  $\mathbf{a}_i$ , причем заполняет все пространство, не оставляет свбодных мест и нигде не перекрывается дважды. Не существует однозначного способа выбора примитивной ячейки.



Рис. 5.5: Мягкое рентгеновское излучение при переход<br/>е $3s \to 2p$ в кристалле Na и в парах Na

Примитивная ячейка должна содержать только один узел решетки (если пренебречь поверхностью). Поэтому nv = 1, а v = 1/n, где n- число атомов в единице объема, а v – объем примитивной ячейки. Объем не зависит от выбора примитивной ячейки.

### 5.3.2 Примитивная ячейка Вигнера-Зейтца

Наиболее употребительным способом выбора примивной ячейки, которая сохраняет симметрию решетки является ячейка Вигнера-Зейтца. Она строится следующим образом. Выбирается один из узлов в качестве центра ячнейки В-З, затем проводятся линии соединяющие данный узел с соседними узлами. Затем каждая соединительная линия делится пополам и перпендикулярно ей проводится линия - грань ячейки и т.д. Пример построение ячейки Вигнера-Зейтца показан на Рисунке <u>5.3.2.</u> 5.8.



Рис. 5.6: Пример двумерной кристаллической решетки Браве и двух ее основных векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , линейная комбинация которых позволяет сгенерировать любой вектор решетки.



Рис. 5.7: Примеры возможных способов выбора примитивной ячейки для двумерной решетки.

# 5.4 Уравнение Шредингера для электрона в периодическом потенциале

Мы рассматривали классическую систему невзаимодействующих электронов, которые не ощущали периодического потенциала решетки. Такая система является газом свободных электронов. В кваликлассическом приближении, электронные волны в идеальном кристалле претерпевают отражение от периодических атомных плоскостей и интерферируют, Ионы решетки расположены в строгом порядке, определяемом решет-

5.4. Уравнение Шредингера для электрона в периодическом потенциале9



Рис. 5.8: Пример ячейки Вигнера-Зейтца для двумерной решетки Браве.

кой Браве. Следовательно, потенциал взаимодействия также обладает периодичностью решетки Браве:

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = U(\mathbf{r}), \tag{5.2}$$

где **R** - любой из векторов решетки Браве.

Уравнение Шредингера для электрона в периодической решетке

$$H\Psi = \left[-(\hbar^2/2m)\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right]\Psi = E\Psi(\mathbf{r}), \qquad (5.3)$$

где потенциал обладает свойством (5.2). Одним из основных следствий периодичности потенциала является теорема Блоха.

### 5.4.1 Теорема Блоха (1928г.):

Собственные волновые функции  $\Psi$ одноэлектронного гамильтониана

$$H = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 + U(\mathbf{r}), \qquad (5.4)$$

где  $U(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = U(\mathbf{r})$ , при всех **R**, принадлежащих решетке Браве, могут быть выбраны в форме плоской волны, умноженной на функцию с периодичностью решетки Браве, т.е.

$$\Psi_{nk}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})u_{nk}(\mathbf{r}), \qquad (5.5)$$

где

$$u_{nk}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{nk}(\mathbf{r}) \tag{5.6}$$

для всех  $\mathbf{R}$ , принадлежащих решетке Браве. Здесь n - номер зоны, появление которого связано с тем, что для данного  $\mathbf{k}$  имеется множество решений. В иной записи теорема Блоха имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R})\Psi(\mathbf{r}), \qquad (5.7)$$

что вытекает из (5.5) и (5.6).

### 5.4.2 Обобщенное граничное условие Борна-Кармана для периодического потенциала

Вместо макроскопического "ящика" с размерами *L* для периодических граничных условий Борна-Кармана в теории Зоммерфельда, выбираем "ящик" соразмерный элементарной ячейке соответствующей решетке Браве. Такое граничное условие является естественным обобщением граничных условий Борна-Кармана для периодического потенциала. Запишем его в виде

$$\Psi_{nk}(\mathbf{r} + N_i \mathbf{a}_i) = \Psi_{nk}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3$$
(5.8)

Здесь  $\mathbf{a}_i$  - тройка основных векторов, а все  $N_i$  - целые числа достигающие величин порядка  $N^{1/3}$ , где  $N = N_1 N_2 N_3$  – полное число элементарных ячеек в кристалле. Как и в теории Зоммерфельда, мы предполагаем, что объемные свойства кристалла не зависят от выбора граничных условий, которые поэтому могут быть выбраны из соображений удобства вычислений. Применяя к граничным условиям теорему Блоха, находим

$$\Psi_{nk}(\mathbf{r} + N_i \mathbf{a}_i) = \exp(iN_i \mathbf{k} \mathbf{a}_i) \Psi_{nk}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3$$
(5.9)

10

#### 5.4. Уравнение Шредингера для электрона в периодическом потенциале11

Соотношение (5.9) для произвольных  $N_i$  может выполняться только при условии

$$\exp(iN_i\mathbf{ka}_i) = 1$$
, где  $i = 1, 2, 3$ , т.е.  $N_i\mathbf{ka}_i = 2\pi m_i$ ,  
(5.10)

где  $m_i$ -целые числа. Представим  $\mathbf{k}$  в виде разложения по базису векторов  $\mathbf{b}_i$  обратной решетки

$$\mathbf{k} = \sum_{j=1,2,3} x_j \mathbf{b}_j,\tag{5.11}$$

где <sub>*j*</sub> – действительные числа,  $\mathbf{b}_j \mathbf{a}_i = 2\pi \delta_{ij}$ .

Тогда из (5.10) и (5.11) получим  $x_j = m_j/N_j$  и разрешенный блоховский волновой вектор должен иметь следующий общий вид

$$\mathbf{k} = \sum_{j=1,2,3} (m_j / N_j) \mathbf{b}_j.$$
(5.12)

Из (5.12) следует, что объем  $\Delta \mathbf{k}$  в **k** -пространстве, приходящийся на одно разрешенное значение **k**, равен объему параллелепипеда с ребрами  $\mathbf{b}_j/N_j$ :

$$\Delta \mathbf{k} = \frac{\mathbf{b}_1}{N_1} [(\mathbf{b}_2/N_2) \times (\mathbf{b}_3/N_3)] = \frac{1}{N} \mathbf{b}_1 (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3).$$
(5.13)

Следовательно,  $N = \mathbf{b}_1(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)/\Delta \mathbf{k}$  есть число разрешенных волновых векторов в 1-й элементарной ячейке обратной решетки, т.е. в 1-й зоне Бриллюэна. Поскольку  $\mathbf{b}_1(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)$  есть объем элементарной ячейки обратной решетки, ф-ла (5.13) означает, что число разрешенных волновых векторов, содержащихся в одной элементарной ячейке обратной решетки, равно числу ячеек в кристалле. Объем элементарной ячейки обратной решетки обратной решетки равен  $(2\pi)^3/v$ , где v = V/N - объем элементарной ячейки прямой решетки. Следовательно, формулу

(5.13) можно записать в виде:

$$\Delta \mathbf{k} = (2\pi)^3 / V. \tag{5.14}$$

Это совпадает с результатом, полученным в теории Зоммерфельда. Заметим, что для системы любой размерности  $d, \Delta \mathbf{k} = (2\pi)^d / V.$ 

### 5.5 Зоны Бриллюэна и энергетические зоны

Как следует из теоремы Блоха, изменение вектора  $\mathbf{k}$  на вектор обратной решетки не приводит к изменению состояния, чем он отличается от аналогичной величины в модели свободных электронов. Поэтому вектор  $\mathbf{k}$  называют не волновым, а *квазиволновым* вектором. Поскольку вектор  $\mathbf{k}$  пределен с точностью до векторов обратной решетки, то обычно за "начальный" вектор принимают вектор находящийся ближе других к началу координат  $\mathbf{k}$ -пространства.

Область  $-\mathbf{b}_i/2 < \mathbf{k} < \mathbf{b}_i/2$  называют 1-й зоной Бриллюэна (или просто зоной Бриллюэна – з.Б.). В качестве примера на рис. 5.5 приведена 1-я ВZ для ГЦК решетки. Легко видеть, что по построению ВZ является ячейкой Вигнера-Зейтца для обратной решетки. Область между границей 1-й ВZ и многогранником, определяемым плоскостями, рассекающими пополам радиус-векторы узлов обратной решетки, следующего порядка близости к началу координат в **к**-пространстве, называется 2-й BZ и т.д.

Некоторые особые точки в *k*-пространстве имеют высокую симметрию и им присвоены буквенные обозначения. Так для всех 3х основных стуктур, ПК, ОЦК и ГЦК, Г - центр зоны, в ГЦК *W* - вершины граней, *L* и *X* –центры соответственно

шестиугольных и квадратных граней, - середина двух касающихся шестиугольных граней, U - середина ребра, по которому касаются шестиугольные и квадратные грани и т.д. В приведенной схеме энергетических зон, центральная точка зоны Бриллюэна обычно обозначается буквой Г. Для ГЦК-решетки Бравэ (рис. 5.5а.) точкой L обозначают центр шестиугольной грани усеченного октаэдра 1-й зоны Бриллюэна, соответствующей ОЦК-решетке в -пространстве, точкой - центр квадратной грани. Некоторые другие точки показаны на рис. 5.5.

# 5.5.1 Энергетические зоны в "пустой" решетке

Для описания общего вида зонной структуры вещества часто бывает вполне достаточно воспользоваться приближением "пустой" решетки, т.е. решетки потенциал взаимодействия в которой пренебрежимо мал, U(r) = 0. При этом уже сам факт присутствия периодичности решетки приводит к образованию зонной структуры в энергетическом спектре электронов. Уравнение Шредингера для электрона в "пустой" периодической решетке из (5.3)

$$-(\hbar^2/2m)\nabla^2\Psi = E\Psi(\mathbf{r}), \qquad (5.15)$$

Решением этого уравнения, очевидно, являются плоские волны, волновой вектор которых может быть представлен в виде суммы вектора обратной решетки G и вектора k, лежащего в первой зоне Бриллюэна. Волновая функция может быть записана в блоховской форме (5.16)

$$\Psi_{nk}(\mathbf{r}) = u_{nk}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{kr}), \qquad (5.16)$$

где  $u_{nk}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{G}\mathbf{r})$ . Вектор **G** играет здесь роль индекса

зоны n. Собственное значение энергии выражается формулой

$$E_n(\mathbf{k}) = (\hbar^2/2m)(\mathbf{k} + \mathbf{G})^2.$$
(5.17)

Из (5.15) также видно, что это же решение будет справедливо в случае постоянного потенциала  $U_0$ . Энергия электронов в этом случае будет

$$E_n(\mathbf{k}) = U_0 + (\hbar^2/2m)(\mathbf{k} + \mathbf{G})^2.$$
 (5.18)

Рассмотрим зонную структуру ГЦК решетки в приближении "пустой" решетки. Обратной решеткой для ГЦК решетки Браве является ОЦК решетка, ячейка Вигнера-Зейтца, т.е. зона Бриллюэна, которой является "усеченный октаэдр" (рис. 5.5). Энергия  $E_n(\mathbf{k})$  наинизшей зоны соответствует  $\mathbf{G} = 0$  в центре ВZ– точка  $\Gamma \equiv (0, 0, 0)$ . Это состояние, как и вся 1-я ВZ, невырождено. Учитывая структуру векторов G обратной решетки, для ГЦК решетки, легко увидеть, что второй энергетический уровень при k = 0 равен  $\hbar^2 \mathbf{G}^2/2m$ , причем  $G = (2\pi/a)(+1, +1, +1)$ . Этот уровень вырожден восьмикратно, т.е. восемь плоских волн

$$\Psi_{nk}(x, y, z) = \exp[2\pi i/a(+x+y+z)]$$
(5.19)

имеют одинаковую энергию.

# 5.6 Приближение сильной связи

# 5.7 Приближение слабой связи. "Почти свободные электроны"

В приближении слабого периодического потенциала ("почти свободные электроны", NFE) состояние электронов подвержено лишь слабому возмущающему воздействию со стороны ионов.

Приближение (NFE) дает достаточно хорошее описание, в частности, зонной структуры металлов с внешними s- и p-оболочками (металлы I-IV групп). Эти элементы называют металлами с почти свободными электронами. Два фактора лежат в основе приближения NFE:

Электроны проводимости не могут скапливаться в области достаточно сильного потенциала остовов вследствие принципа Паули.

Электроны проводимости оказывают дополнительную (к электронам остова) экранировку взаимодействия.

Для простоты мы рассмотрим одномерную модель. В качестве нулевого приближения мы используем плоскую волну (учитывая периодические гранусловия)

$$\frac{1}{\sqrt{L}}e^{(ikx)},\tag{5.20}$$

с энергией  $\varepsilon^{(0)}(k) = \hbar^2 k^2 / 2m.$ 

разложим слабый периодический потенциал в ряд Фурье по векторам обратной решетки:

$$V(x) = \sum_{n} V_{n} e^{(i2\pi nx/a)},$$
(5.21)

где

$$V_n(k,k') = \frac{1}{L} \int dx V(x) e^{-i(k-k')x} = V_n \delta \left(k - k' - \frac{2\pi n}{a}\right)$$
(5.22)

Первая поправка по теории возмущений  $\varepsilon^{(1)} = V_0$  дает только несущественный сдвиг энергии. Поправка второго порядка

$$\varepsilon^{(2)}(k) = \sum_{n \neq 0} \frac{|V_n|^2}{\varepsilon^{(0)}(k) - \varepsilon^{(0)}(k - 2\pi n/a)}$$
(5.23)

Это выражение применимо пока оно мало по сравнению с поправкой первого порядка V<sub>0</sub>. Когда знаменатель стремится к нулю, т.е. вблизи Брэгговских плоскостей BZ, состояния почти вырождены, это выражение расходится и надо использовать теорию возмущений для вырожденных состояний.

Предположим, что функции i где i = 1; 2 отвечают состояниям 1; 2. Выберем волновые функции в виде их суперпозиции:

$$\Psi = A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 \tag{5.24}$$

Подставив в УрШ получим

$$A_1(\varepsilon_1 - \varepsilon)\psi_1 + V(A_1\psi_1 + A_2\psi_2) + A_2(\varepsilon_2 - \varepsilon)\psi_2 = 0. \quad (5.25)$$

Умножим это уравнение вначале на  $\psi_1^*$ , а затем на  $\psi_2^*$ . Интегрируя по x получим

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon + V_0)A_1 + V_n A_2 = 0 V_n^* A_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon + V_0)A_2 = 0$$
 (5.26)

В результате, получаем квадратичное уравнение по  $\varepsilon$ 

$$\varepsilon^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon + \varepsilon_1\varepsilon_2 - |V_n|^2 = 0, \qquad (5.27)$$

решение которого

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4} + |V_n|^2}$$
(5.28)

В результате, энергия имеет разрыв величиной  $2|V_n|$  вблизи точки  $k = \pm n\pi/a$ , как показано на рисунке

Энергетический спектр периодичен по k в импульсном пространстве, поэтому зачастую спектр приводят к первой зоне Бриллюэна путем вычитания из k соответсвущего вектора обратной решетки. Спектр, приведенный таким образом к первой BZ изображен на панели (b). Амплитуда потенциала определяет расщеплению уровней.

# 5.8 Поверхность Ферми

### 5.8.1 Построение поверхности Ферми

В модели свободных электронов Зоммерфельда энергия Ферми (1.26)  $E_F = (hk_F)^2/2m$ , где для 3-мерного случая  $k_F = (3\pi^2 N/V)^{1/3} = (3\pi^2/\Omega_0)^{1/3}$ , и  $\Omega_0$  - объем, приходящийся на один атом. В случае если на элементарную ячейку приходится 1 электрон, то поверхность Ферми имеет объем вдвое меньше чем зона Бриллюэна и не пересает ее границ. Интерференция отраженных электронных волн периодическим потенциалом решетки почти не искажает ПФ и она не отличается от сферы. Вообще, многие электронные свойства кристалла зависят от соотношения размеров Ферми-поверхности и 1-й зоны Бриллюэна.

Рассмотрим построение зонной структуры на примере кристалла Pb с ГЦК структурой Вычисляем радиус Ферми-сферы содержащей Z = 4 электрона на атом и в этом случае  $\Omega_0 = a^3/4$  и  $k_F = (12\pi^24/a^3)^{1/3} = 1.24(2\pi/a)$ . Как видно, полученное значение  $k_F$  больше радиуса сферы, вписанной в соответствующую данному случаю зону Бриллюэна с радиусом  $k_{Bril} = (2\pi/a)$ . Это приводит к тому, что ПФ имеет сложную конфигурацию, проникая во 2-ю и 3-ю зоны Бриллюэна. Построив сферы радиусом  $k_{Bril}$  с центром в каждом из соседних узлов обратной решетки, как это сделано на рис. 2.4 для двух сечений (100) (a) (110) (б) з.Б., можно представить заполнение 2-й з.Б. в схеме приведенных зон как перекрытие з.Б. соседней сферой Ферми, 3-й ВZ двумя соседними сферами Ферми (см. детали в Анималу, Гл.5, § 2 и ААК § 6, у Ашкрофта и Мермина, у Киттеля).

- 5.8.2 Эффективная масса
- 5.8.3 Приближение эффективной массы
- 5.8.4 Скорость электронов
- 5.8.5 Заполнение зон



Рис. 5.9: Первая зона Бриллюэна (a) и 1я энергетическая зона в ней (б) для для ГЦК решетки.



Рис. 5.10: Энергетический спектр в слабом потенциале в приближении NFE: (a) в расширенной схеме зон, (b) в спектре сведенном к первой зоне Бриллюэна.



Рис. 5.11: Периодическая зависимость ветвей спектра в схеме расширеннхзон и в 1й зоне Бриллюэна. Ращепление зон.



Рис. 5.12: Схематическое изображение заполнения зон.



Рис. 2.4. Построение поверхности Ферми для кристалла Pb для сечений (100) и (110) з.Б., проходящих через точки ГUK а) и ГХW б), соответственно

Рис. 5.13: Рb