



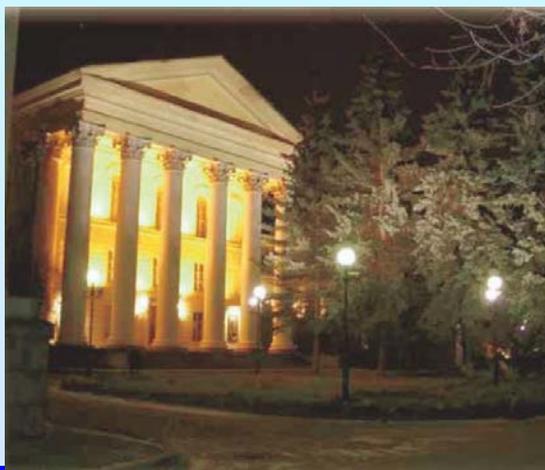
## Нобелевское открытие 1982г.: Целочисленный квантовый эффект Холла

*В.М. Пудалов*

Центр высокотемпературной сверхпроводимости и квантовых материалов им. В.Л. Гинзбурга («**Центр Гинзбурга**»)  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

**См. также**

**<http://sites.lebedev.ru/ru/sces/3176.html>**



**Нобелевское открытие 1982г.:  
Целочисленный квантовый эффект Холла  
или как электроны объединяются с квантами  
потока**

***В.М. Пудалов*** («Центр Гинзбурга», ФИАН)

**См. также**

**<http://sites.lebedev.ru/ru/sces/3176.html>**

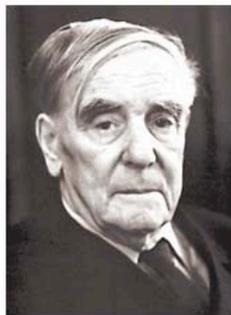
# Российские Нобелевские лауреаты



## The Nobel Prize in Physics 1978

"for his basic inventions and discoveries in the area of low-temperature physics"

"for their discovery of cosmic microwave background radiation"



**Pyotr Leonidovich Kapitsa**



**Arno Allan Penzias**

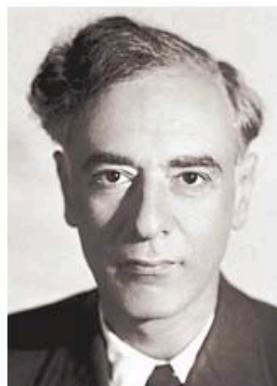


**Robert Woodrow Wilson**



## The Nobel Prize in Physics 1962

"for his pioneering theories for condensed matter, especially liquid helium"



**Lev Davidovich Landau**

USSR

Academy of Sciences  
Moscow, USSR

b. 1908  
d. 1968

# Российские Нобелевские лауреаты



## The Nobel Prize in Physics 2000

"for basic work on information and communication technology"

"for developing semiconductor heterostructures used in high-speed- and opto-electronics"

"for his part in the invention of the integrated circuit"



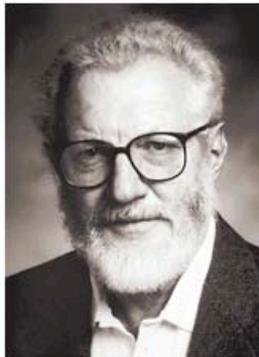
**Zhores I. Alferov**

🕒 1/4 of the prize

Russia

A.F. Ioffe Physico-Technical Institute  
St. Petersburg, Russia

b. 1930



**Herbert Kroemer**

🕒 1/4 of the prize

Federal Republic of Germany

University of California  
Santa Barbara, CA, USA

b. 1928



**Jack S. Kilby**

🕒 1/2 of the prize

USA

Texas Instruments  
Dallas, TX, USA

b. 1923  
d. 2005



## The Nobel Prize in Physics 2003

"for pioneering contributions to the theory of superconductors and superfluids"



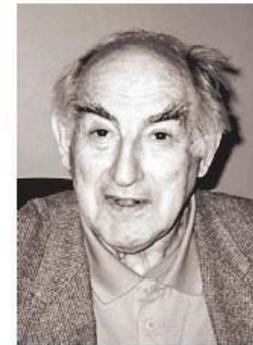
**Alexei A. Abrikosov**

🕒 1/3 of the prize

USA and Russia

Argonne National  
Laboratory  
Argonne, IL, USA

b. 1928



**Vitaly L. Ginzburg**

🕒 1/3 of the prize

Russia

P.N. Lebedev Physical  
Institute  
Moscow, Russia

b. 1916



**Anthony J. Leggett**

🕒 1/3 of the prize

United Kingdom and USA

University of Illinois  
Urbana, IL, USA

b. 1938

# Квантовый эффект Холла: целочисленный (1985) и дробный КЭХ (1998)



The Nobel Prize in Physics 1985

"for the discovery of the quantized Hall effect"



**Klaus von Klitzing**

Federal Republic of  
Germany

Max-Planck-Institut für  
Festkörperforschung  
Stuttgart, Federal  
Republic of Germany

b. 1943

Titles, data and places given above refer to the time of the award.  
Photos: Copyright © The Nobel Foundation



The Nobel Prize in Physics 1998

"for their discovery of a new form of quantum fluid with fractionally  
charged excitations"



**Robert B. Laughlin**

🕒 1/3 of the prize

USA

Stanford University  
Stanford, CA, USA

b. 1950



**Horst L. Störmer**

🕒 1/3 of the prize

Federal Republic of  
Germany

Columbia University  
New York, NY, USA

b. 1949



**Daniel C. Tsui**

🕒 1/3 of the prize

USA

Princeton University  
Princeton, NJ, USA

b. 1939

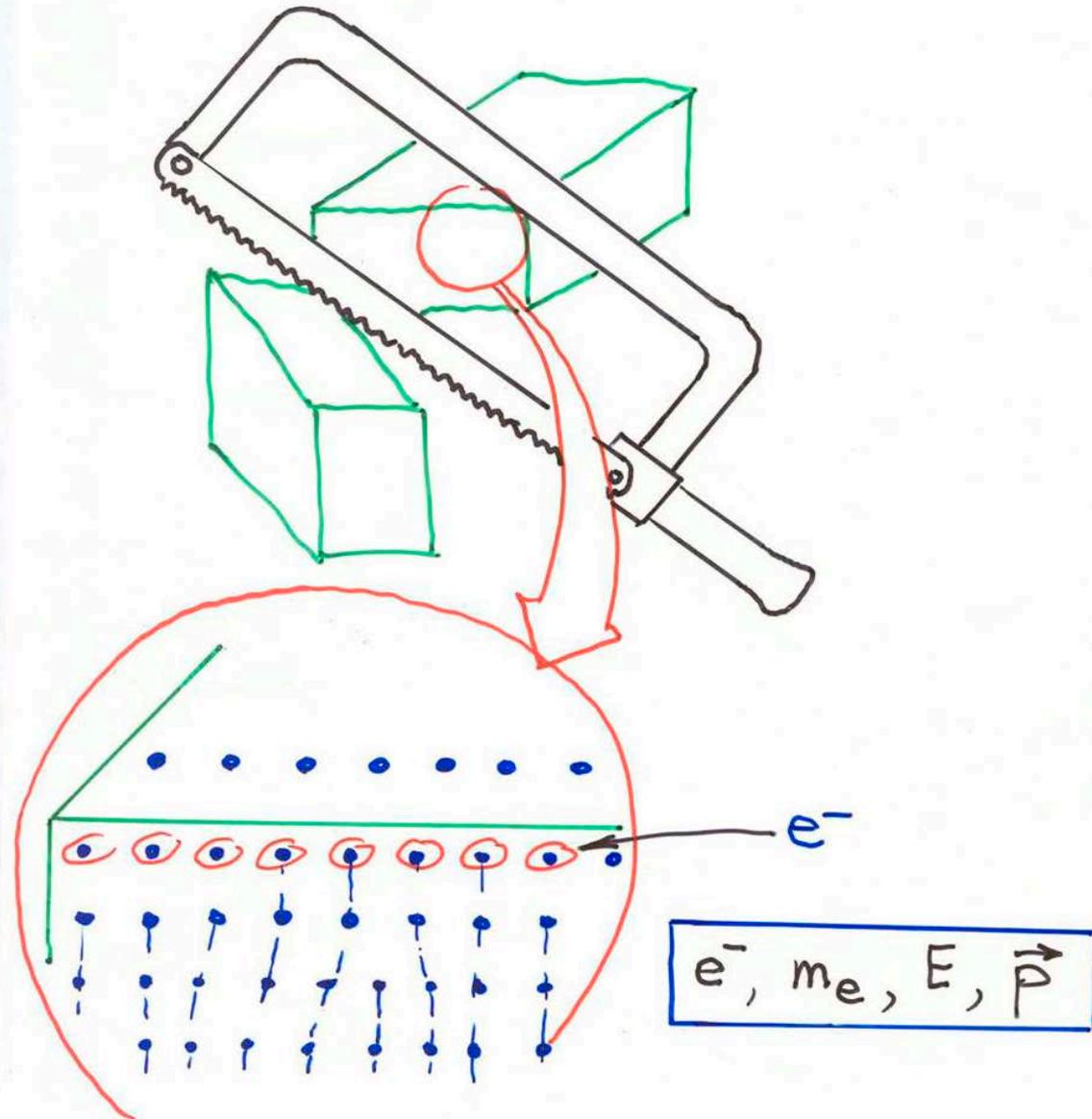
(in Henan, China)

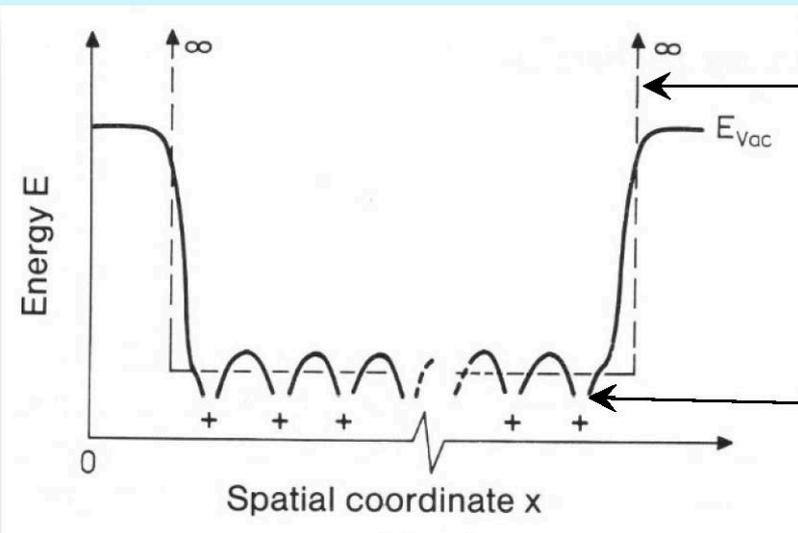
# Квантовая физика электронов в твердом теле

- ✓ Электрон – волна
- ✓ Спин электрона
- ✓ Фермионы и бозоны
- ✓ Как заполняются в зону фермионы и бозоны
- ✓ Обменная энергия электронов
- ✓ Квантование магнитного потока
- ✓ Дуальность зарядов и квантов потока: КЭХ

♥ Классический подход

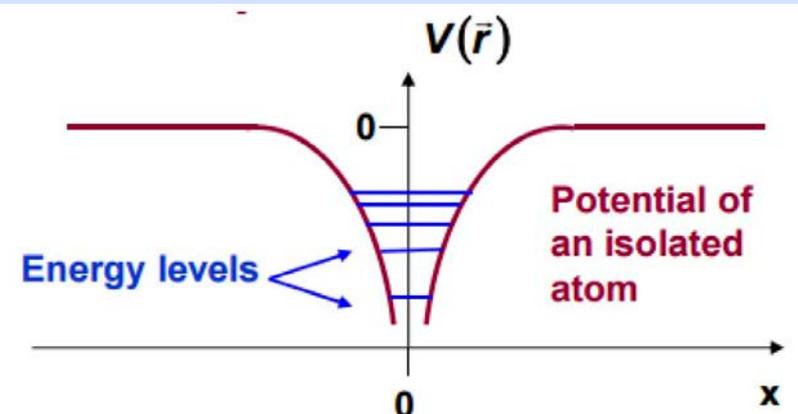
Как устроено  
твёрдое тело?



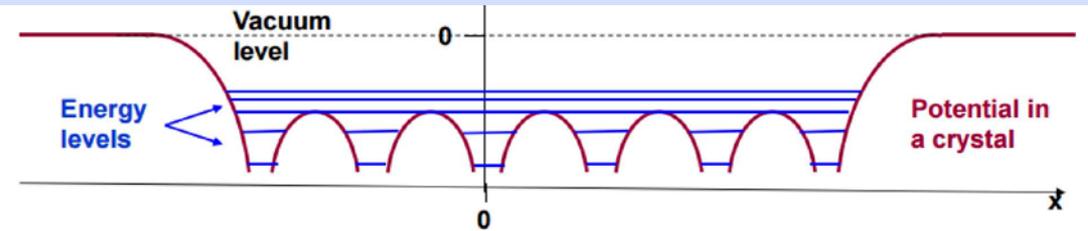


**Свободные электроны**

**Потенциал решетки**



**Уровни энергии в изолированном атоме**



**Потенциал решетки и уровни энергии**

# Частица



# Волна

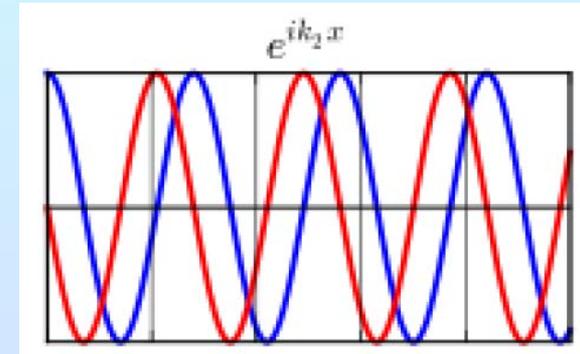
Свободные электроны

$$p = \hbar k$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

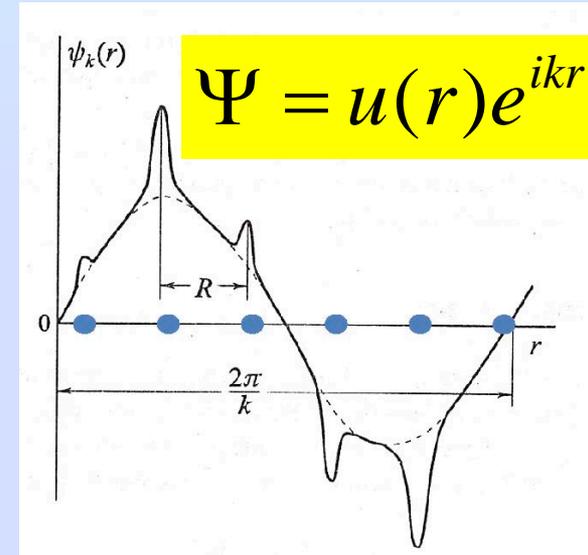
$$\Psi = e^{ikr}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$



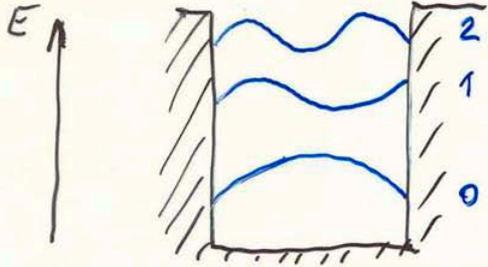
Почти свободные электроны

Квазичастицы  $\approx$  “электроны”  
 $e, m^*(E), k, E^*(k)$



Квантование энергии

А) Прямоугольная потенциальная яма



$$\delta p \delta x = \hbar$$

$$\delta p = p \text{ (1/2 периода)}$$

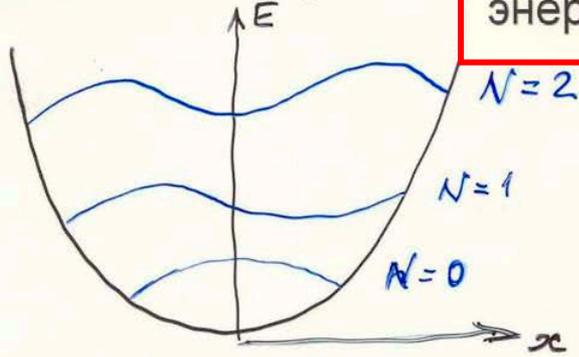
$$p = \hbar/x$$

$$E = \hbar^2/(2mx^2) \quad N=0$$

$$E = \hbar^2(N+1)^2/(2mx^2)$$

**Важно: у квантовой системы может быть несколько состояний !** Состояние с наименьшей энергией - основное

В) Линейный осциллятор

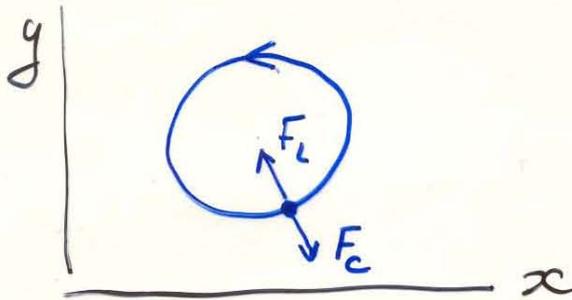


$$E_{pot} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$\omega$  - собственная частота колебаний  
(в классической механике)

$$E_N = (N+1/2)\hbar\omega$$

С) Важный пример линейного осциллятора - движение заряженной частицы в перпендикулярном магнитном поле



$$\cdot H_z = H_L$$

Баланс между силой Лоренца и центробежной силой

$$F_L = \frac{e}{c} [v \times H]$$

$$F_c = m \frac{v^2}{r_c} = m \omega^2 r_c$$

$$evH / c = mv^2 / r_c$$

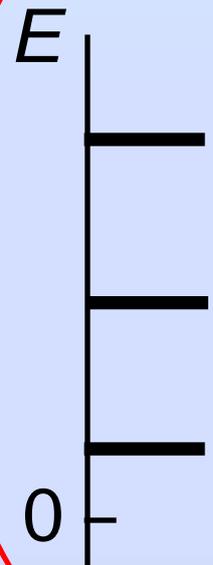
$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(2\pi r_c / v)} = \frac{v}{r_c} = \frac{eH}{mc}$$

циклотронная частота

$$a_H = \sqrt{\hbar / m \omega_c}$$

$a_H = r_c$  - магнитная длина (радиус наинизшей орбиты)

Уровни  
Ландау



$$E_N = (N+1/2)\hbar\omega_c$$

# Спин и магнитный момент частицы

$p = \hbar l$  - орбитальный (мех.) момент кол-ва движения,

$M = l \mu_B$  - орбитальный магнитный момент,

где  $\mu_B = e\hbar/2mc$

George Uhlenbeck, Samuel Goudsmit (1925) ввели "спин" электрона для объяснения спектроскопических данных

$\hbar\sigma$  - собственный момент количества движения (спин),

$\sigma$  - целое или полуцелое число (спин)

$M = g\sigma\mu_B$  ( $g = 2$  для свободного электрона)

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc} \approx 10^{-20} \text{ эрг/Гс}$$

Важно: в классич. физике нет спинового магнитного момента:

$$\mu_B \rightarrow 0 \text{ при } \hbar \rightarrow 0$$

# Тождественность частиц. Перестановки

Все частицы одного типа эквивалентны, т.е. неразличимы.  
При их перестановке не происходит существенных изменений волновой функции.

Система из двух частиц:

$$\psi(\xi_1, \xi_2)$$

При перестановке  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $\psi$  может измениться только на несущественный фазовый множитель

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\alpha} \psi(\xi_2, \xi_1) \quad (\alpha - \text{вещественна})$$

Повторим перестановку и вернемся к исходной системе:

$$e^{2i\alpha} = 1; \quad e^{e i \alpha} = \pm 1$$

т.о.

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \pm \psi(\xi_2, \xi_1)$$

Две возможности для  $\psi$ : симметричная (антисимметричная)

Перестановка 2х частиц есть инверсия  $x \rightarrow -x$

Волновые функции всех состояний одной и той же системы должны иметь одинаковую симметрию.

# Фермионы и Бозоны

Легко обобщить на системы из  $N$  частиц.

Поскольку частицы неразличимы, то любая их пара эквивалентна другой паре. Если одна пара описывается симметричной функцией, то и вся система тоже.

**Важно:**

Волновые функции всей системы из  $N$  частиц либо меняют знак при перестановке любой пары, либо не меняют.

Симметричные по перестановке - статистика Бозе

Антисимметричные - статистика Ферми-Дирака

Больцмановская статистика восстанавливается при  $T \rightarrow \infty$ .

# Обмен. Заполнение состояний (принцип Паули)

Тип статистики зависит от спина:

Частицы с полуцелым спином - фермионы ( $e, p, n$ ),  
с целым спином - бозоны.

## Сложные частицы (атом из нескольких ядер) ?

Важна четность числа входящих в состав фермионов ( $\text{Si}^{29}$ ).

Перестановка двух сложных частиц  $\equiv$  перестановке  $N$  пар фермионов.

Поэтому:

четное число фермионов ( ${}^4\text{He}, {}^{28}\text{Si}$ ) - статистика Бозе

нечетное число фермионов ( ${}^3\text{He}, {}^{29}\text{Si}$ ) - Ферми

## Принцип Паули для фермионов (Pauli 1925)

В системе одинаковых фермионов не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии две или более частицы.

# Физ. основа принципа Паули: Обменная энергия

Рассмотрим систему из 2х фермионов:

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \chi(\sigma_1, \sigma_2) \varphi(r_1, r_2)$$

где  $\Psi$  - антисимметрична:

$\varphi$  - симметрична,  $\chi$  - анти  $\uparrow\downarrow$   
 $\varphi$  - антисимметрична,  $\chi$  - симметрична  $\uparrow\uparrow$

Два возможных решения. Два уровня энергии:  $E = C \pm J$ , где

$$J = U \iint \varphi_1(r_1) \varphi_1^*(r_2) \varphi_2(r_2) \varphi_2^*(r_1) dV_1 dV_2$$

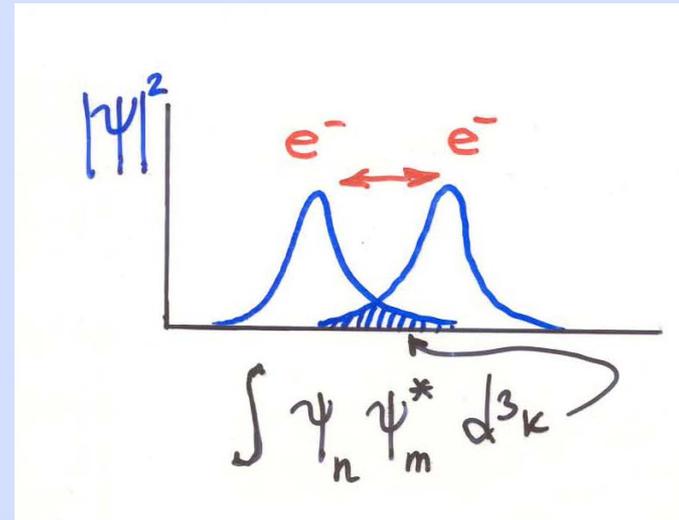
определяется перекрытием  $\psi$  функций.

Энергия состояния  $\downarrow\uparrow$  ниже.

Для перехода в состояние  $\uparrow\uparrow$  требуется затратить энергию.

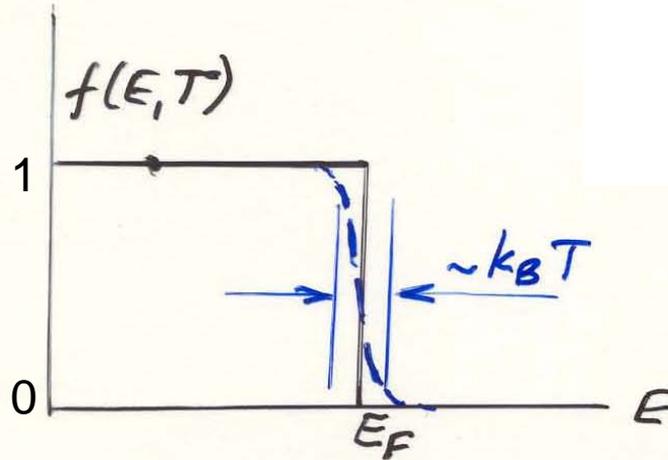
Это физ. смысл принципа Паули.

Это результат для электронного "газа" (слабое e-e взаимодействие). В e-жидкости знак  $J$  м.б. другим.

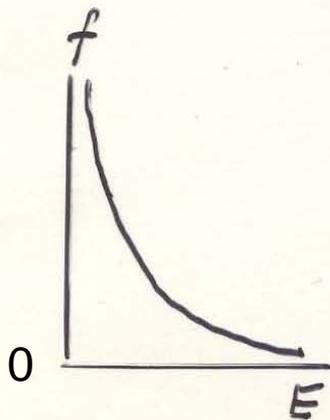


# Статистика: вероятность заполнения квантованных уровней энергии

фермионы



бозоны



$$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

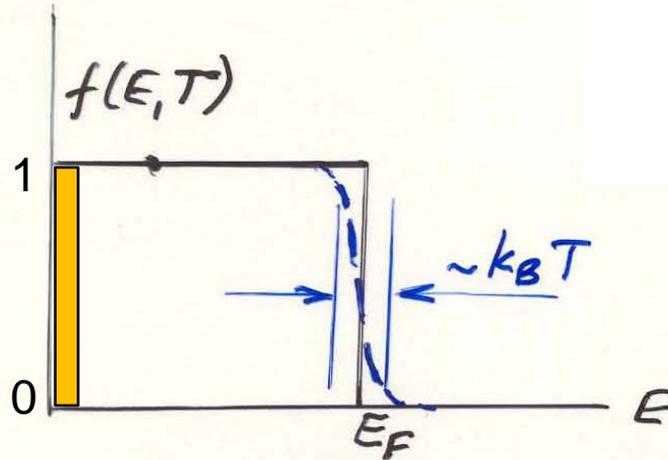
статистика Ферми  
 $\mu > 0$

$$f(E, T) = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

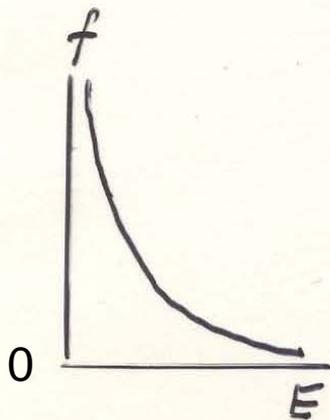
статистика Бозе  
 $\mu = 0, \mu < 0$

# Статистика: вероятность заполнения квантованных уровней энергии

фермионы



бозоны



$$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

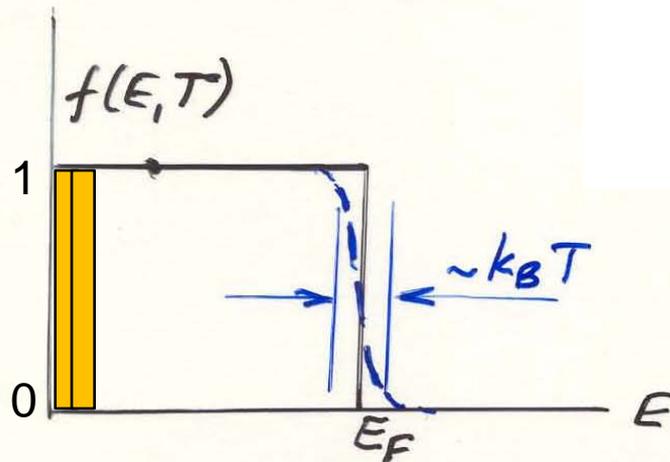
статистика Ферми  
 $\mu > 0$

$$f(E, T) = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

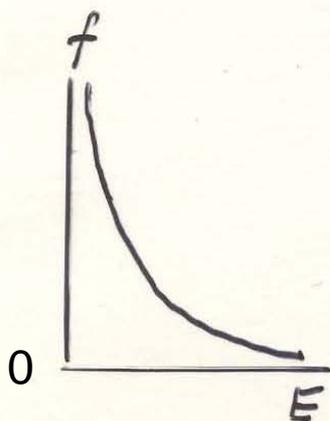
статистика Бозе  
 $\mu = 0, \mu < 0$

# Статистика: вероятность заполнения квантованных уровней энергии

фермионы



бозоны



$$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

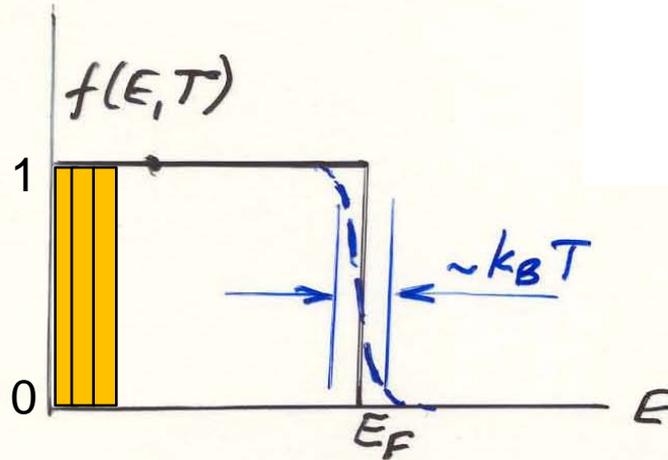
статистика Ферми  
 $\mu > 0$

$$f(E, T) = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

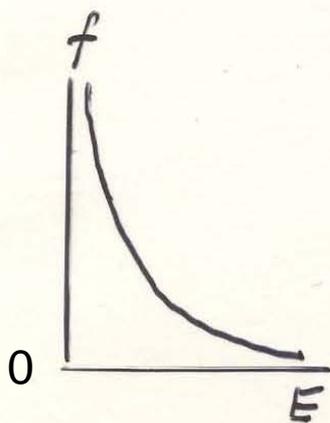
статистика Бозе  
 $\mu = 0, \mu < 0$

# Статистика: вероятность заполнения квантованных уровней энергии

фермионы



бозоны



$$f(E, T) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

статистика Ферми  
 $\mu > 0$

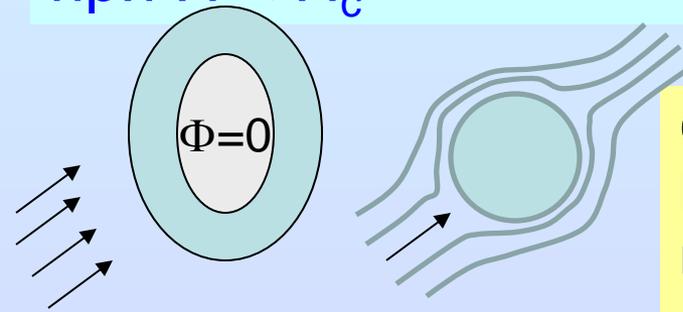
$$f(E, T) = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right)}$$

статистика Бозе  
 $\mu = 0, \mu < 0$

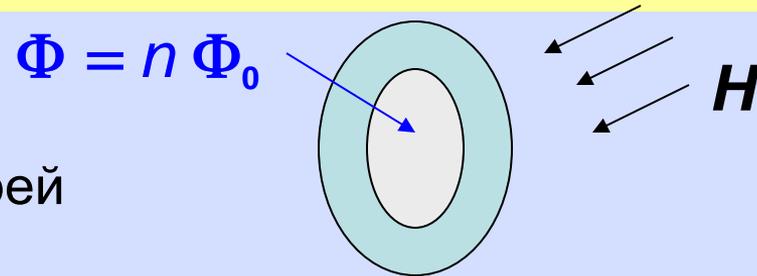
# Квантование магнитного потока в сверхпроводниках

## 1. Сверхпроводник 1го рода:

Магнитное поле выталкивается наружу (эффект Мейсснера) при  $H < H_c$



Сверхпроводник 2го рода ( $H_{c1} < H < H_{c2}$ ):  
Магнитное поле проникает внутрь в виде вихрей. Вихрь несет 1 квант потока  $\Phi_0 = hc/2e = 2 \cdot 10^{-7} \text{Тс см}^2$



Теоретическое предсказание вихрей  
в сверхпроводниках 2го рода:  
А.А. Абрикосов (1952)

Экспериментальное обнаружение квантования потока:  
R. Doll, M. Näbauer (1961)  
B.S. Deaver, W.M. Fairbank (1961)

# Магнитное поле $\mathbf{B}$ и вектор потенциал $\mathbf{A}$ . Что действует на электроны в магнитном поле?

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

**Вектор-потенциал** и магнитный поток. По теореме Стокса

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \qquad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

**Обобщённый импульс.**

При движении частицы в электромагнитном поле полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_0 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad \text{где} \quad p_0 = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

## Что такое ротор ( $\text{rot } \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ )

Если  $\mathbf{v}(x, y, z)$  – скорость, то

$\text{rot } \mathbf{v}$  - это вектор, пропорциональный вектору угловой скорости

$$(\text{rot } \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

$$(\text{rot } \mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

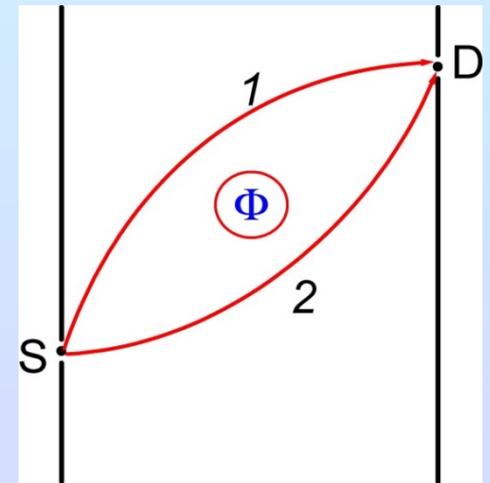
# Магнитное поле $B$ и вектор потенциал $A$ . Что действует на электроны? Эффект Аронова-Бома (Aharonov-Bohm)

Для волны распространяющейся по пути  $i$

$$\psi_i(r) = \exp[-i\theta_i(r)]\psi_i^0(r)$$

$\psi_i^0(r)$  – волн. функция в отсутствие  $A$

$$\theta_i(r) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_S^D A dr_i \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$



$$|\psi_1(D) + \psi_2(D)|^2 = |\psi_1(D)|^2 + |\psi_2(D)|^2 + 2 \operatorname{Re} \psi_1^*(D) \psi_2(D) \approx 2 |\psi_1^0(D)|^2 [1 + \cos[\xi_E(D)] + \theta_1 - \theta_2]$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left[ \int_S^D A dr_1 - \int_S^D A dr_2 \right] = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \operatorname{rot} A ds = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

# Классический эффект Холла (Edwin Hall, 1879). 3D

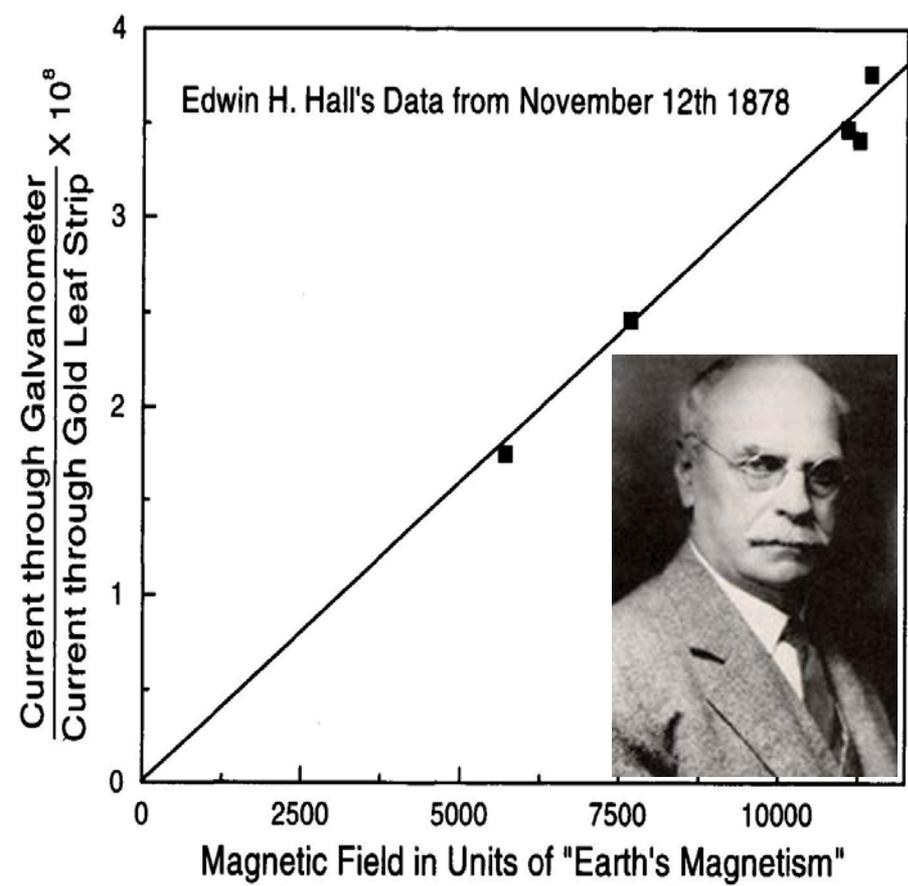
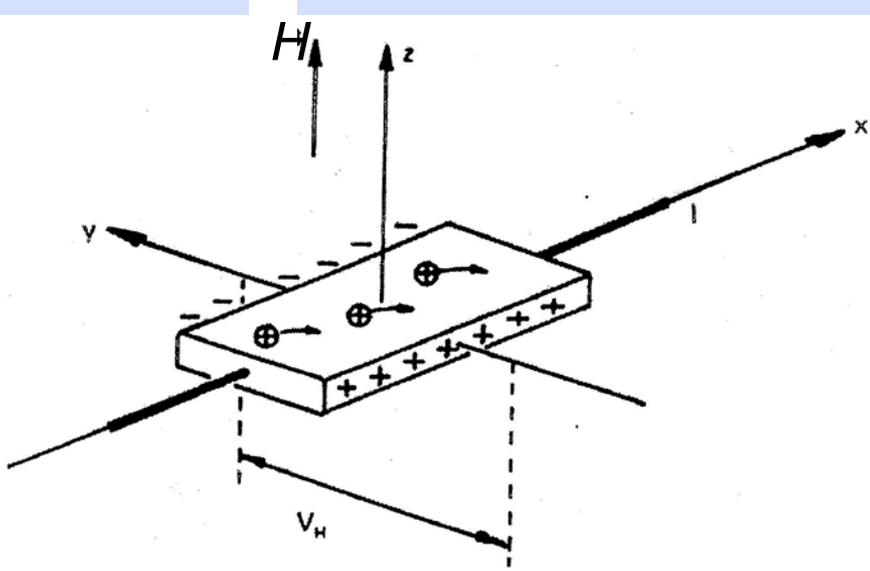
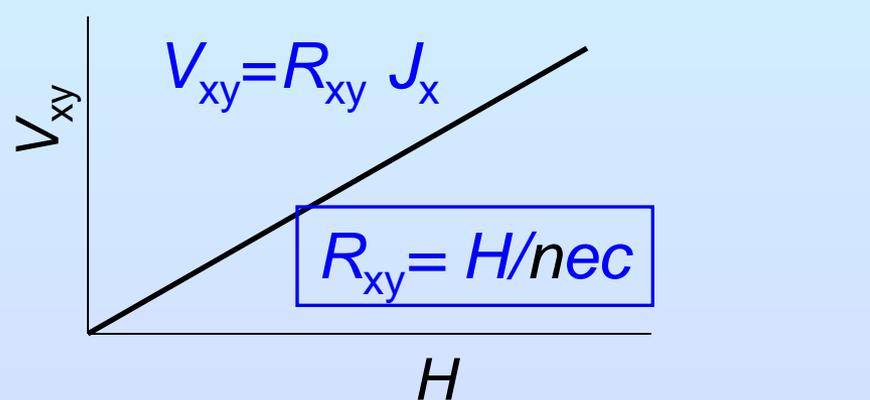
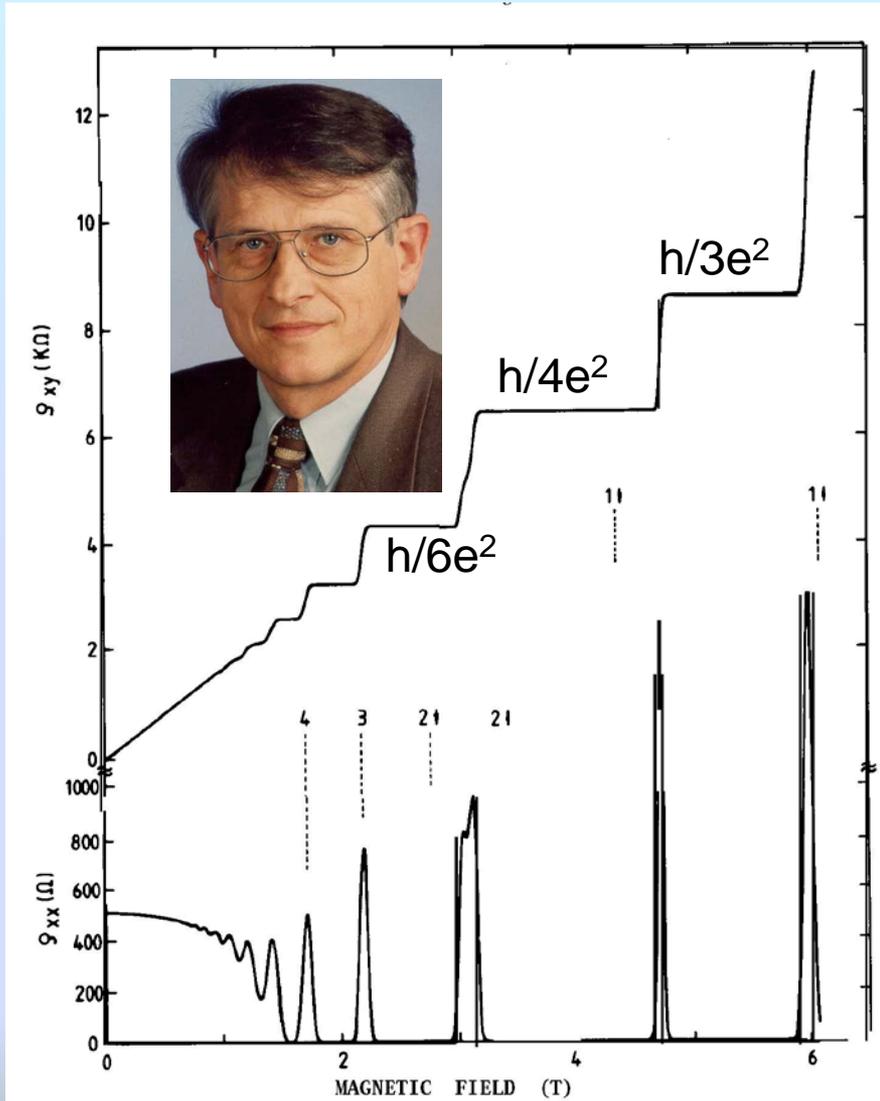
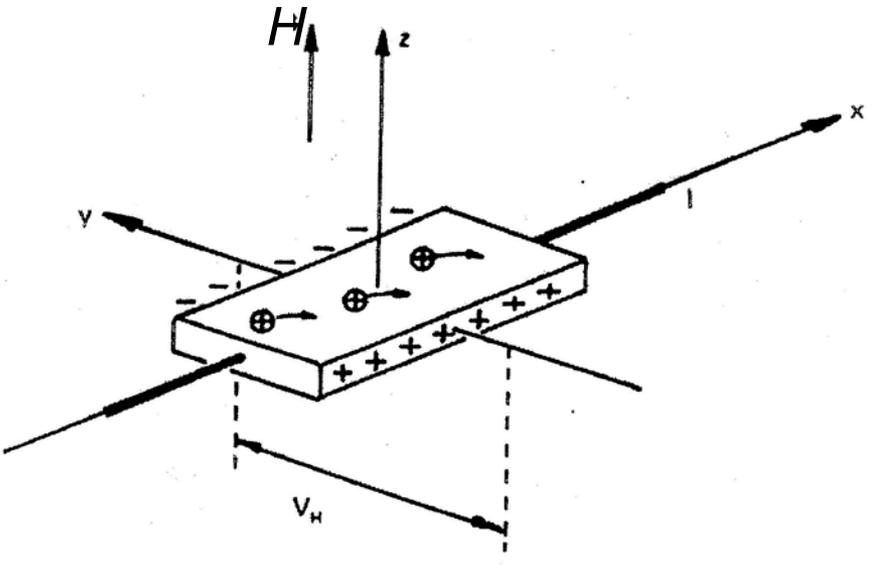
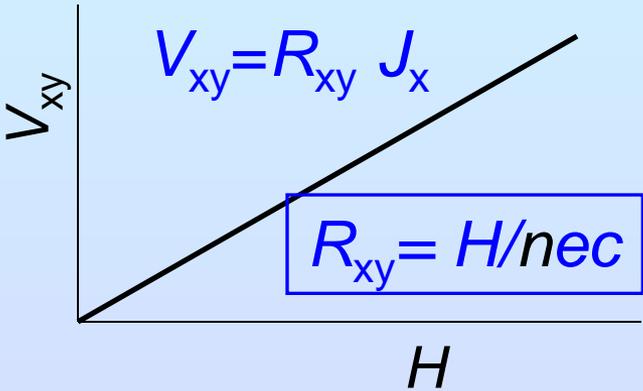


Figure 6. Edwin Hall's Hall data of 1878 as plotted from a table in his publication. The vertical axis is proportional to the Hall voltage,  $V_H$  of Fig. 5 and the horizontal axis is proportional to the magnetic field of Fig. 5. A linear relationship between  $V_H$  and  $B$  and hence between  $R_H$  and  $B$  is apparent. Since the days of Edwin Hall this strictly linear relationship has been confirmed by many, much more precise experiments.

$$\rho_{xy} = R_{xy} [L_y / (L_y L_z)]$$

в 2D системе  $\rho_{xy} \equiv R_{xy}$

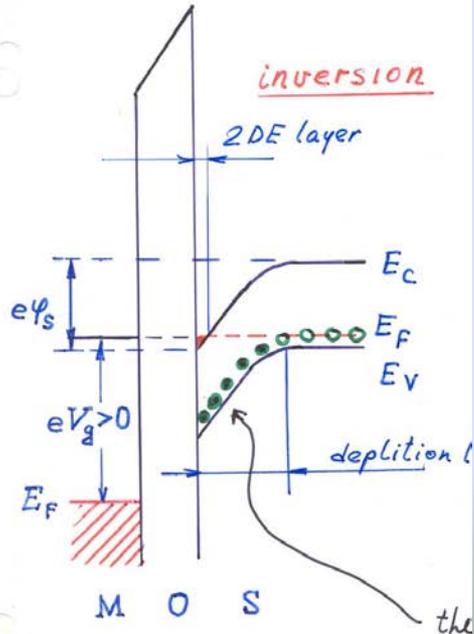
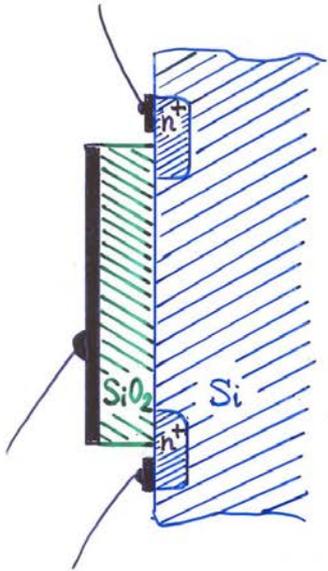
# Квантовый эффект Холла (K.von Klitzing, 1982). 2D



$$\rho_{xy} = R_{xy} [L_y / (L_y L_z)]$$

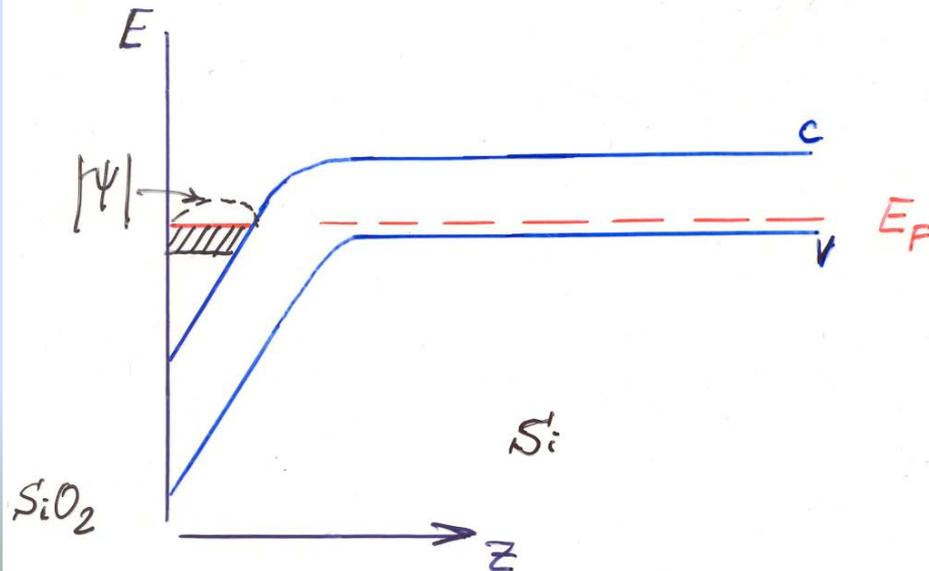
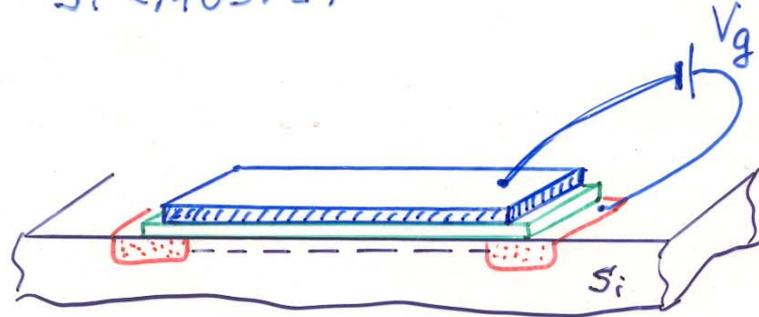
$$\rho_{xy} \equiv R_{xy}$$

# Как приготовить 2D электронную систему



## Кремниевая МДП структура

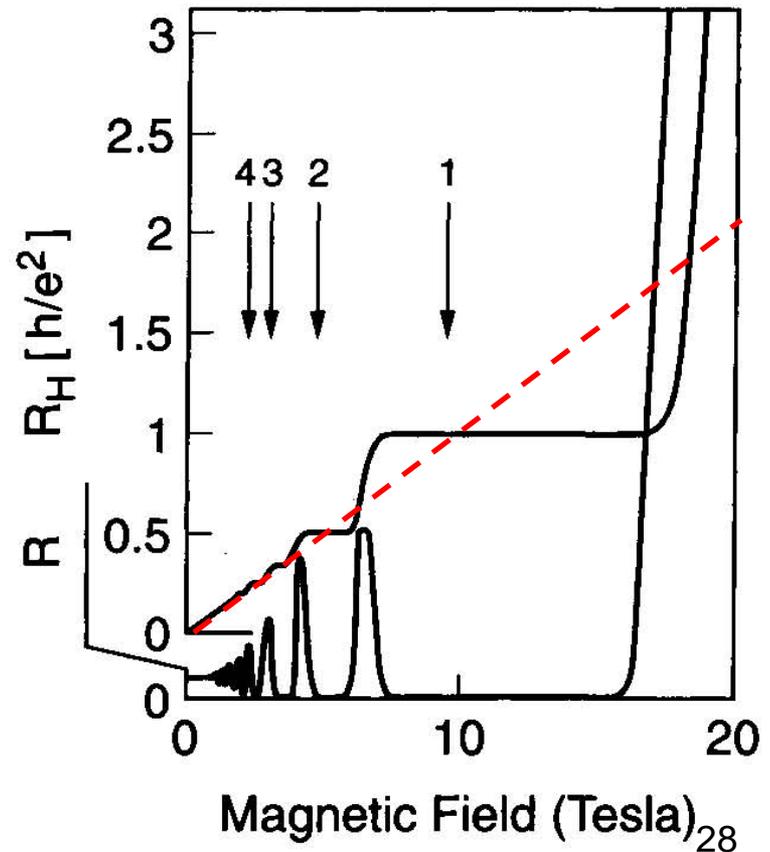
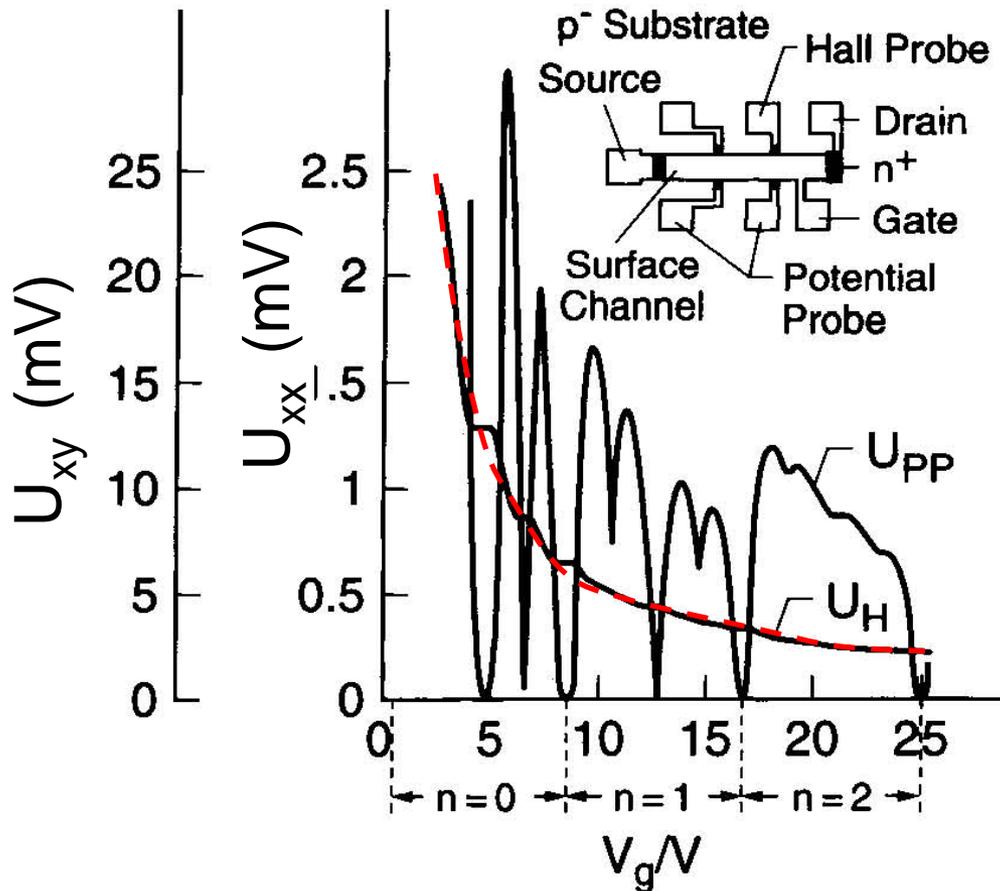
$\text{Si}$ : -MOSFET



$$\rho_{xy} = \frac{H}{nes}$$

В эксперименте можно изменять  $n$  (при постоянном  $H$ )  
или  $H$  (при постоянном  $n$ )

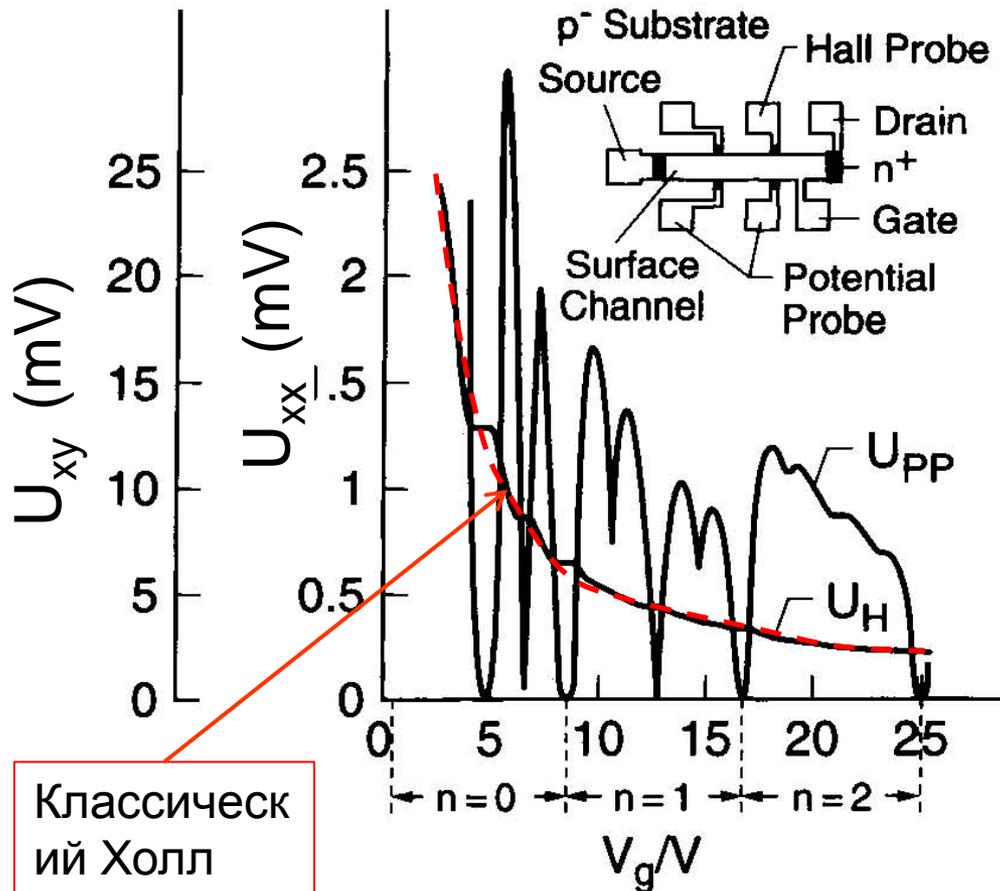
Важно лишь отношение  $\nu = n/n_H$  - “заполнение уровней Ландау”



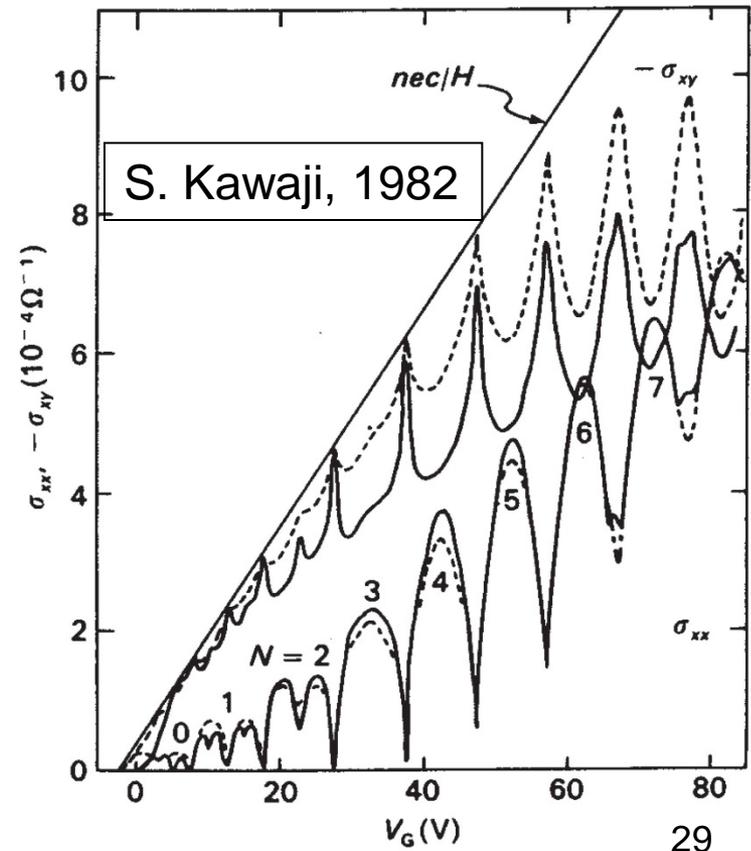
$$\rho_{xy} = \frac{H}{nec}$$

В эксперименте можно изменять  $n$  (при постоянном  $H$ )  
или  $H$  (при постоянном  $n$ )

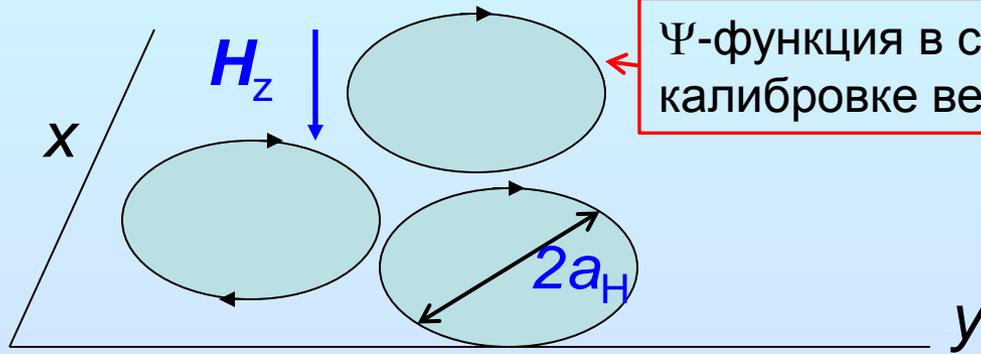
Важно лишь отношение  $\nu = n/n_H$  - "заполнение уровней Ландау"



Классический Холл



# 2D электроны в сильном магнитном поле



$\Psi$ -функция в симметричной калибровке вектор-потенциала

$$a_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}}$$

При  $H \rightarrow \infty$  орбита стягивается в точку!

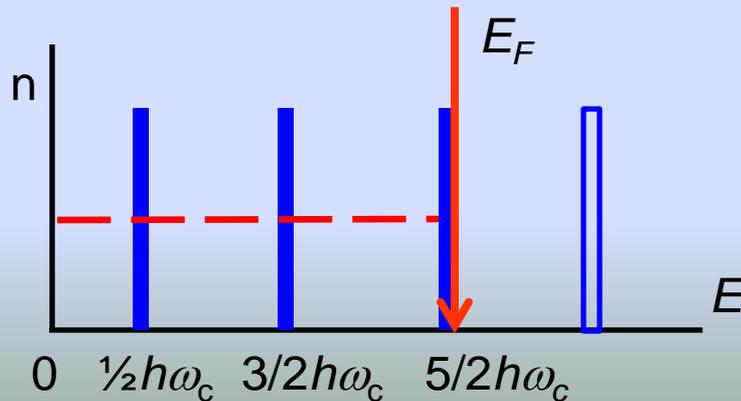
$$E_N = \hbar\omega_c(N+1/2)$$

энергия  $N$ -го уровня Ландау

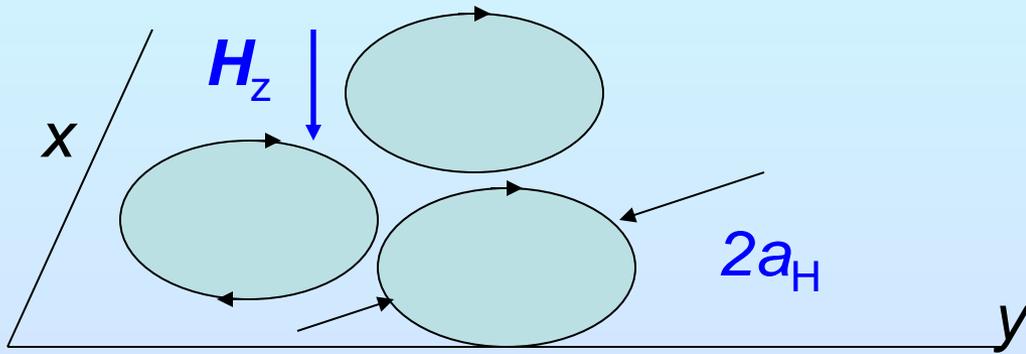
$$n_H = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{He}{hc}$$

$$= \frac{1}{\pi a_H^2}$$

Количество мест для фермионов на каждом уровне Ландау



# 2D электроны в сильном магнитном поле



Типичные условия  
 $H = 10^5 \text{ Э}$ ,  $a_H = 80 \text{ \AA}$   
 $n_H = 2.4 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$

$$E_N = h\omega_c(N + 1/2)$$

энергия  $N$ -го уровня Ландау

$$n_H = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{He}{hc}$$

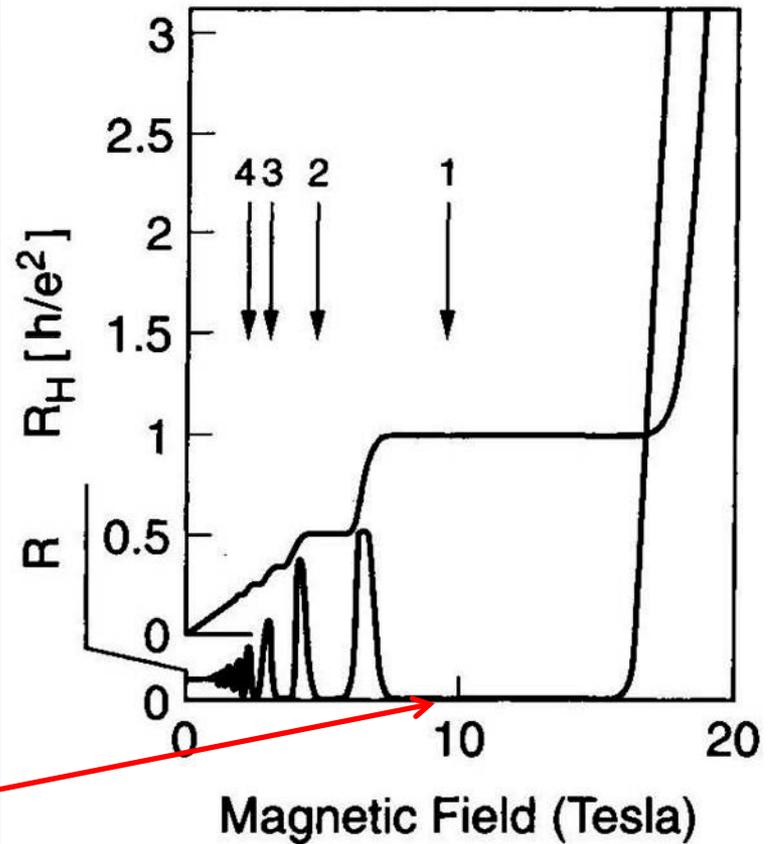
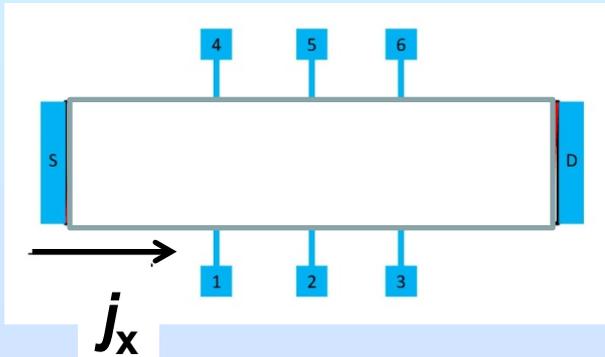
$$= \frac{1}{\pi a_H^2}$$

Количество мест для фермионов на каждом уровне Ландау

Каждый **электрон** связан с **квантом потока** → заполнен 1 уровень.  
 Если полностью заполнены ровно  $i$  уровней  $n = i n_H$ , то

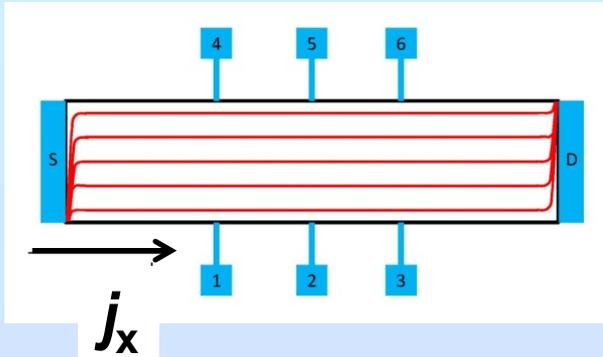
$$\rho_{xy} = \frac{H}{e\pi n} = \frac{H}{e\pi i n_H} = \frac{h}{ie^2}$$

# Диагональная компонента $\rho_{xx}$ в режиме КЭХ



$\rho_{xx}$  падает на  $\sim 10$  порядков

# Диагональная компонента $\rho_{xx}$ в режиме КЭХ



$$E_i = \sum_k \rho_{ik} j_k \quad j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k$$

$$\sigma_{ik} = \rho_{ik}^{-1}$$

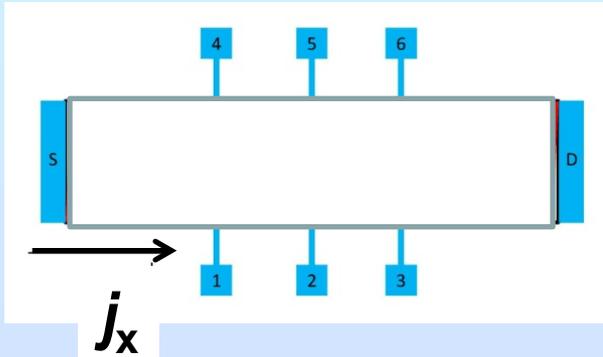
Поскольку  $\rho_{xx} \ll \rho_{yy}$ ,  
то  $\sigma_{xx} \rightarrow 0$  и  $\rho_{xx} \rightarrow 0$  одновременно!

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

Образец в режиме КЭХ - есть одновременно  
**идеальный металл и изолятор!**

Ток течет вдоль эквипотенциалей, а не вдоль поля,  
 $E \cdot j = 0$ .  $E = E_y \perp j$

# Холловская компонента $\rho_{xy}$ в режиме КЭХ



$$E_i = \sum_k \rho_{ik} j_k \quad j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k$$

$$\sigma_{ik} = \rho_{ik}^{-1}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$

Так как  $\rho_{xx} \ll \rho_{xy}$ , то  $\sigma_{xy} \rightarrow 1/\rho_{xy} + o([\rho_{xx}/\rho_{xy}]^2)$

**Важно:  $\rho_{xx}$  и  $\sigma_{xy}$  не зависят от размеров образца в 2D !**

# Почему в КЭХ возникают протяженные плато $\rho_{xy}$

## Беспорядок. Роль $\tau$

Ур-е движения в классической модели с трением

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} - e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau}\mathbf{v}$$

Имеет решение

$$\sigma_{ij} = \frac{ne^2\tau/m}{1+(\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_D}{1+(\omega_c\tau)^2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-\omega_c\tau\sigma_D}{1+(\omega_c\tau)^2}$$

$$\omega_c = \frac{eH}{mc}, \quad \sigma_D = \frac{ne^2\tau}{m}$$

В слабом поле  $\omega_c\tau \ll 1$ ,  $\sigma_{xx} \approx \sigma_D \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$

В сильном поле  $\omega_c\tau \gg 1$ ,  $\sigma_{xx} \approx \sigma_D/(\omega_c\tau)^2 \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$

# Почему в КЭХ возникают протяженные плато $\rho_{xy}$

## Беспорядок. Роль $\tau$

Ур-е движения в классической модели с трением

Имеет решение

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} - eE - \frac{m}{\tau}\mathbf{v}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{ne^2\tau/m}{1+(\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c\tau \\ -\omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}$$

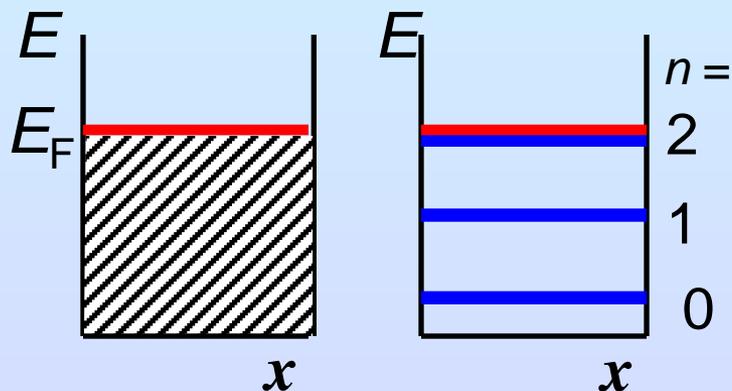
Т.о.,  $\rho_{xx}$  на зависит от поля,

$$\rho_{xy} = \frac{-\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{H}{\pi e c}$$

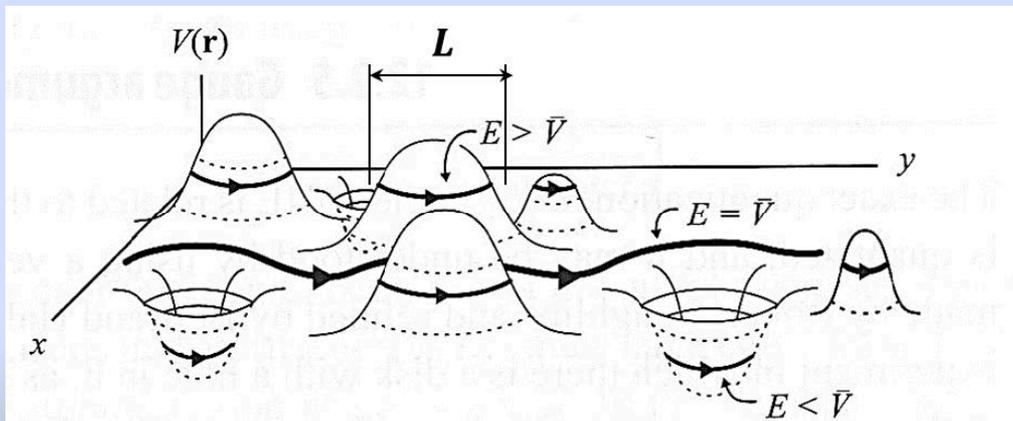
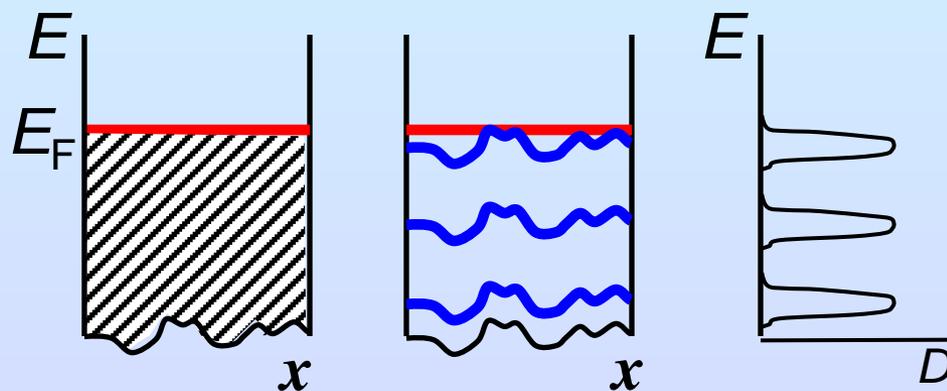
$\rho_{xy}$  не зависит от трения,  $\tau$  !

# Плавный беспорядок и КЭХ

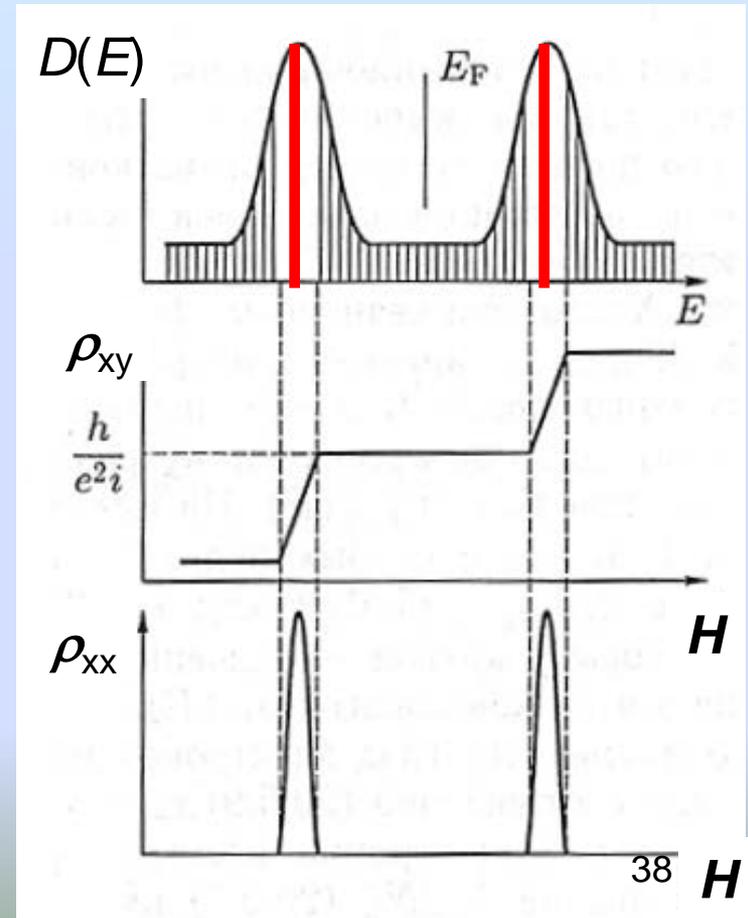
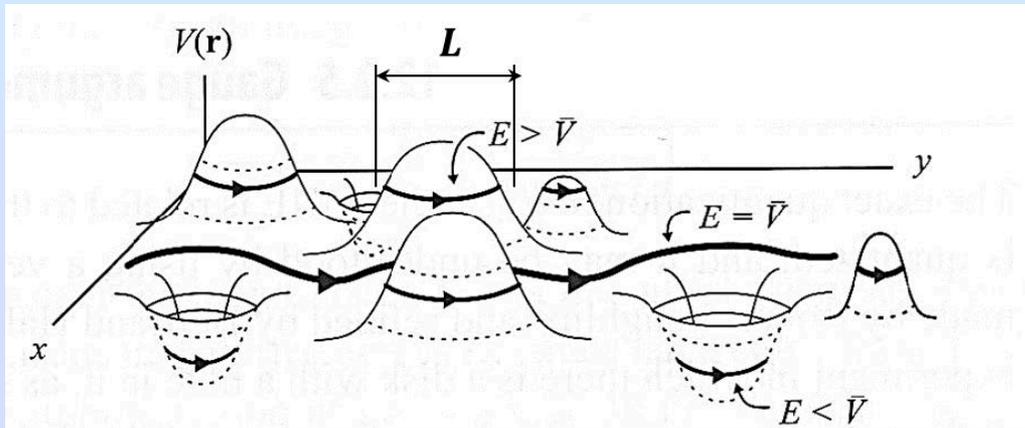
Нет беспорядка  
 $H = 0$        $H \neq 0$



Плавный беспорядок,  $L > a_H$   
 $H = 0$        $H \neq 0$

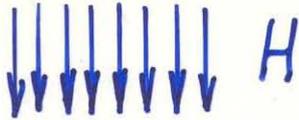


# Плавный беспорядок и КЭХ



# Квантование магнитного потока. Электроны в металле

ВКЛЮЧИМ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ



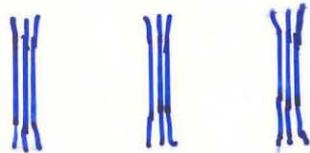
КЛАССИЧЕСКАЯ КАРТИНА

$$\phi = H \cdot S$$

КВАНТОВАЯ КАРТИНА

$n_H = Hc/hc$  плотность квантов  
потока

$$\phi = \phi_0 \cdot n_H \cdot S$$



$$\phi_0 = \frac{hc}{e}$$

квант потока

Вихри  $\rightarrow$  бозоны

ЭЛЕКТРОНЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ:

СМЕСЬ ЗАРЯЖЕННЫХ ФЕРМИОНОВ И БОЗОНОВ

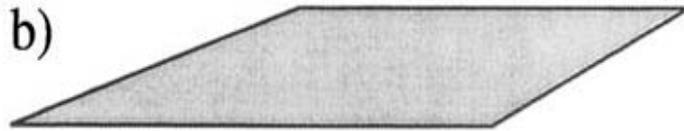
ПЛОТНОСТИ:

$n_e$

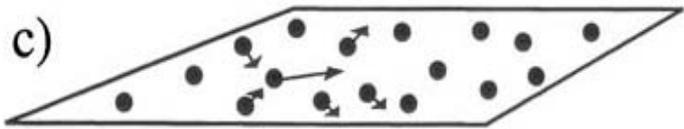
и

$n_H$

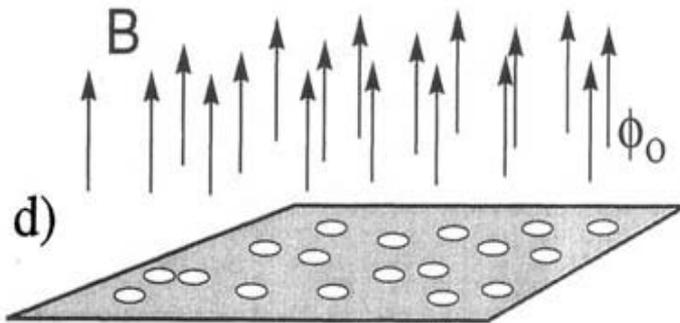
# Электроны (фермионы) + вихри (бозоны)



Плоские волны электронов  
(однородное озеро электронов) +  
однородное магнитное поле



Ультраквантовый предел –  
электроны снова точки



Магнитное поле родило водовороты  
(вихри) в однородном электронном  
озере.  
Каждый вихрь несет квант потока

Внутри вихря плотность **заряда** падает до  $0$ , а **поток** достигает  $\Phi_0$   
На границе вихря плотность **заряда** восстанавливается до  $ne$

# Мысленный эксперимент (R.Laughlin): СВЯЗЬ ЭЛЕКТРОНОВ И КВАНТОВ ПОТОКА

Изменим магнитный поток  $\Phi$  на  $\delta\Phi$

$$I = c \frac{\partial E_T}{\partial \Phi} \Rightarrow I \delta\Phi = c \delta E_T$$

В режиме КЭХ  $\rho_{xx} = 0$ , диссипации нет, поэтому единственная причина изменения энергии - это перенос заряда в Холловском поле с одного берега на другой:

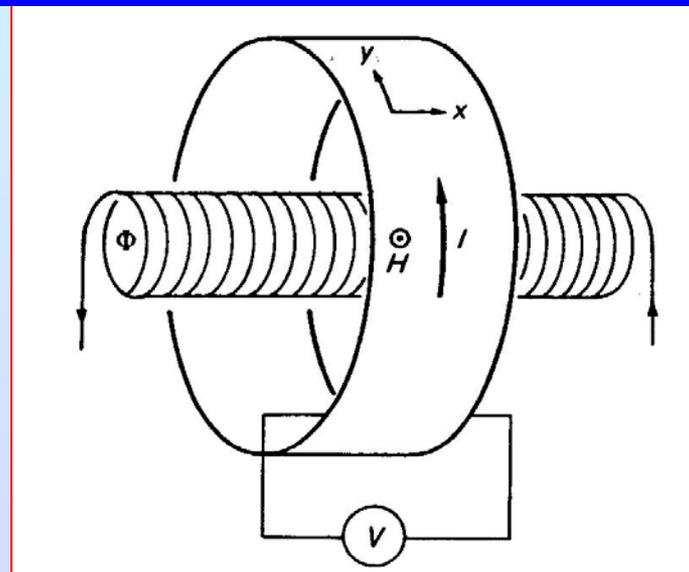
$$\delta E_T = \delta(qV_H)$$

$$V_H = \text{Const} \Rightarrow \delta E_T = \delta q V_H$$

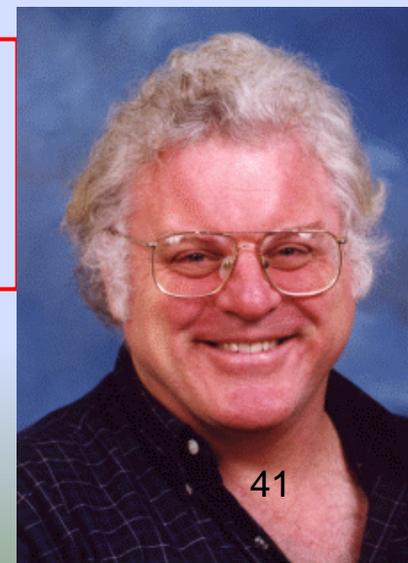
Пусть  $\delta\Phi = \Phi_0 = hc/e$

Тогда

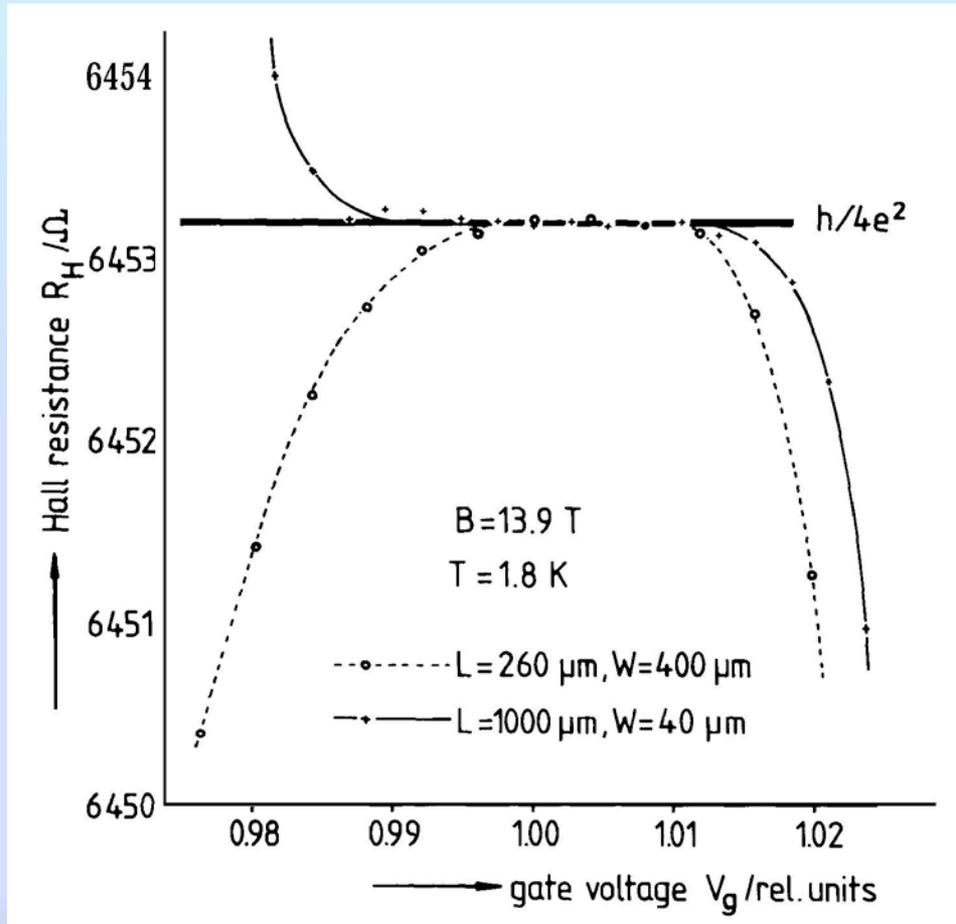
$$\delta q = \frac{\delta E_T}{V_H} = \left( \frac{hc}{ce} \right) \left( \frac{e^2}{h} \right) = e$$



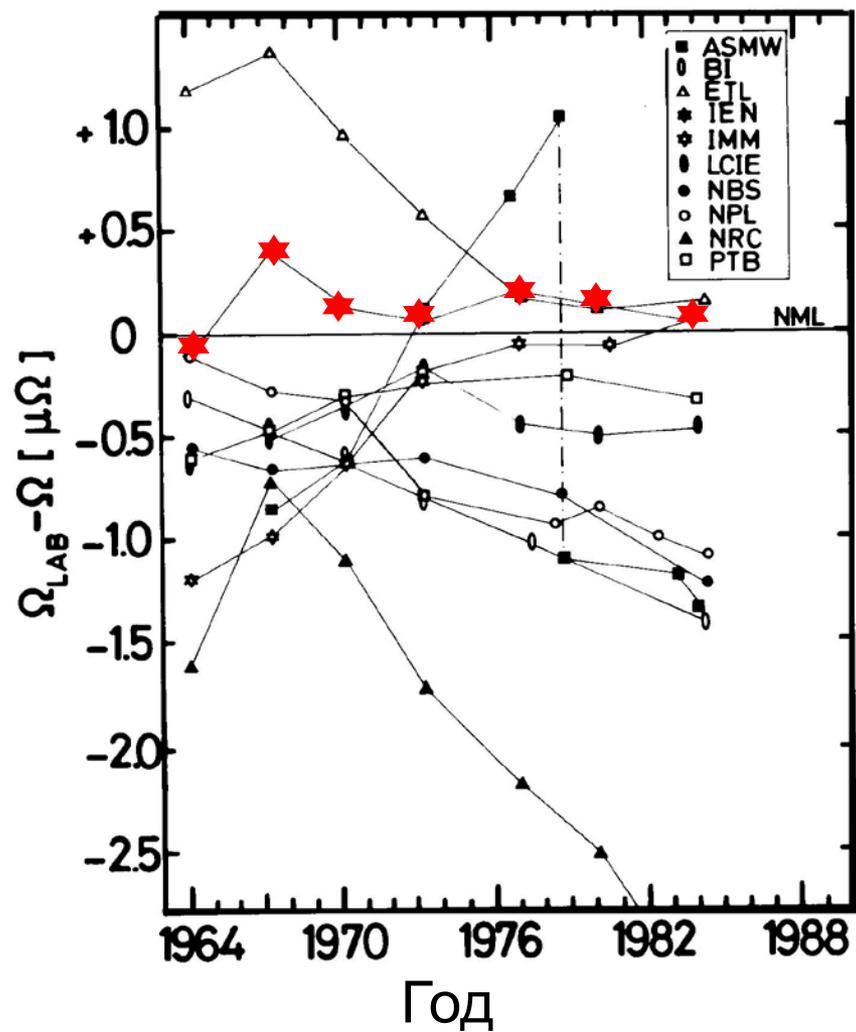
Энергия  
изменяется за счет  
переноса заряда в  
Холловском поле !



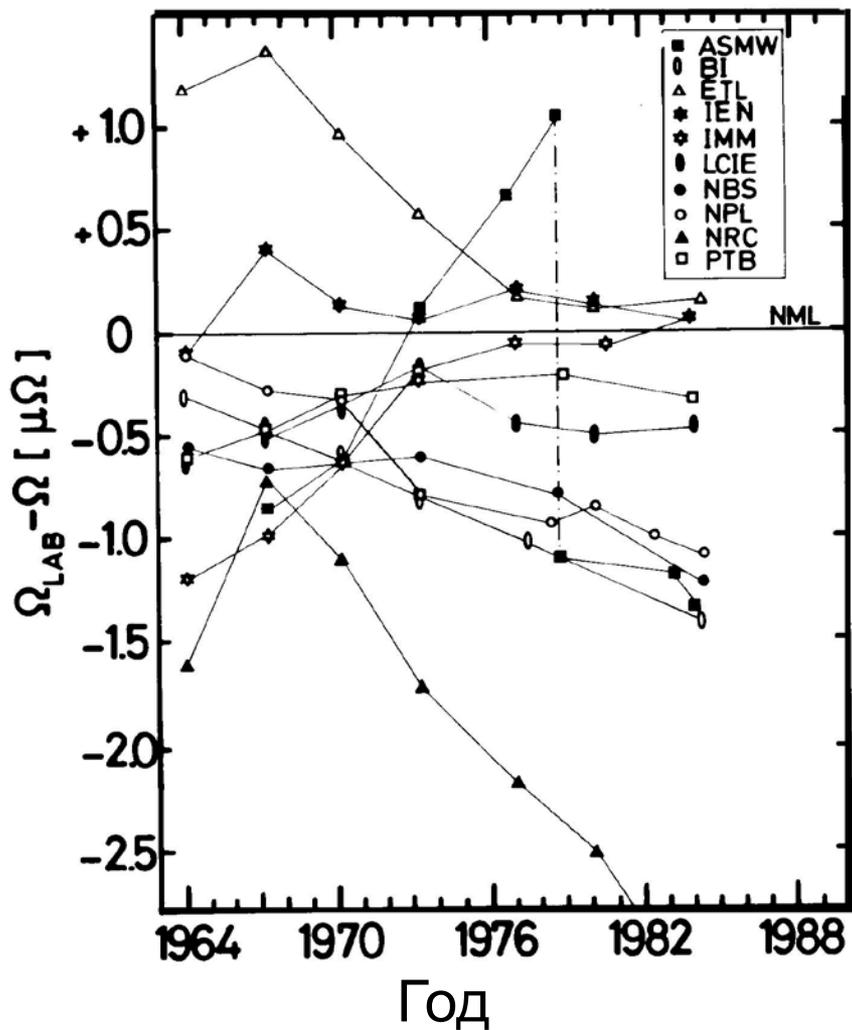
# Точность воспроизведения квантованного значения $R_H$



# Дрейф традиционных эталонов Ома



# Дрейф традиционных эталонов Ома



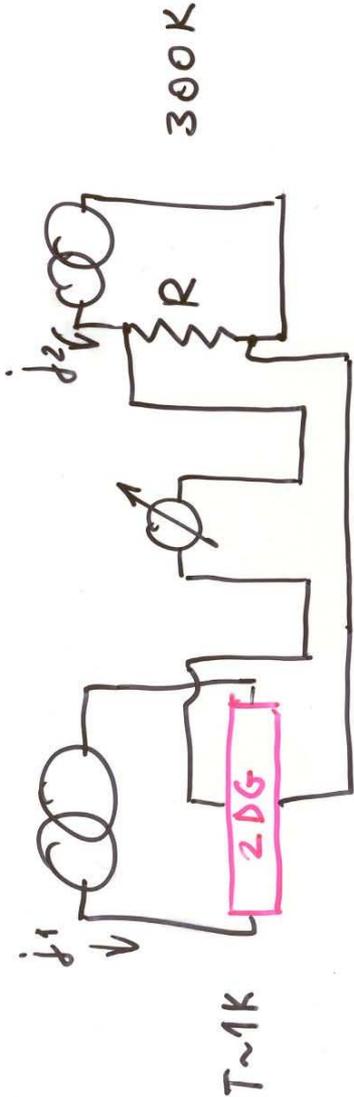
Постулировано МКМВ в 1987г:

1 Ом = 1/25812806 часть  $h/e^2$

# Откуда известно отношение $h/e^2$

Аномальный магнитный момент мюона  
 $(g-2)=0.0023318404$

Упрощенная схема эталона Ома



$$\rho_{xy} \equiv R_H = \frac{h}{e^2 \cdot i} = \frac{25812.806}{i} \text{ Ohm}$$

$$\left( \frac{h}{e^2} \right)$$

can be obtained from fine structure constant

$$\alpha = \frac{\mu_0 e^2}{2hc} = \left( \frac{1}{137.035993} \right)$$

$e$  - is known with accuracy  $10^{-9}$ .

- Absolute determination of a resistance unit.
- Highly reproducible resistance value

What are the errors?

$$\rho_{xx} \propto \frac{h}{e^2} \exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right) \sim \frac{h}{e^2} \exp\left(-\frac{\hbar \omega_c}{2T}\right)$$

$$B = 5T$$

$$GaAs, m^* = 0.068 m_e$$

$$\hbar \omega_c \approx 21 \text{ K/Tesla} \Rightarrow 100K$$

$$\rho_{xx} \sim \exp(-30) \sim 10^{-14} !$$

$$\frac{\delta \rho_{xy}}{\rho_{xy}} \sim \rho_{xx}$$

# Полезные ссылки на web

## Edge states in quantum Hall effect

(by Bertrand Halperin)

<https://www.youtube.com/watch?v=rQs12c-SieE&feature=youtu.be>



## Quantum Hall effect intro (by Ady Stern)

<https://www.youtube.com/watch?v=QC3tQT7MD00>

## Quantum Hall effect summary (by Ady Stern)

[https://www.youtube.com/watch?v=2u8\\_2isyi7o](https://www.youtube.com/watch?v=2u8_2isyi7o)

**Lecture by A. Leggett:** <https://uwaterloo.ca/institute-for-quantum-computing/sites/ca.institute-for-quantum-computing/files/uploads/files/lecture-7.pdf>

## Книги для более глубокого изучения

С. Гирвин . Квантовый эффект Холла. Москва-Ижевск,2003

Квантовый эффект Холла, под ред. Р. Пренджа и С.Гирвина, М., Мир, 1989.

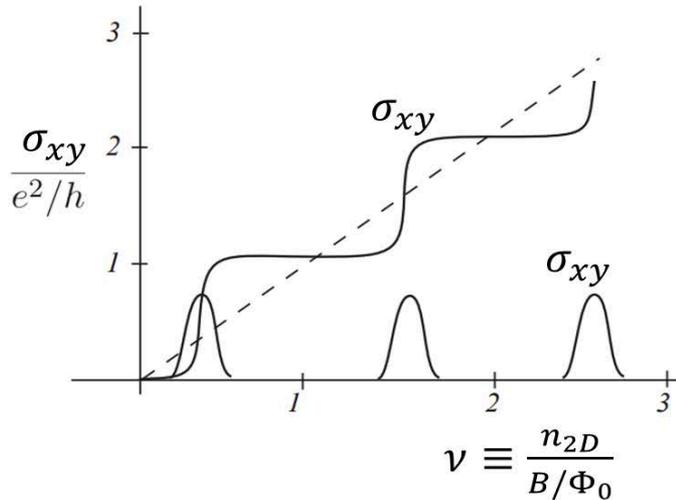
M. Janssen, et al. Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect, Ed. J.Haidu,(VSH, Köln 1994).

Quantum Transport in Semiconductor Nanosystems, C.W.J. Beenakker and H. van Houten, in Solid State Physics, ed. H.Ehrenreich & D. Turnbull, Vol.144 (Academic Press, 1991).

Й. Имри, Введение в мезоскопическую физику, М. Физматлит, 2002.

# Summary

Так теоретики видят КЭХ



$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$$

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$$

$\nu = n/n_H$  -  
коэффициент  
заполнения LL

**“Грандиозное объединение”** концепций:

локализация на беспорядке,

квантовые одномерные каналы,

уровни Ландау,

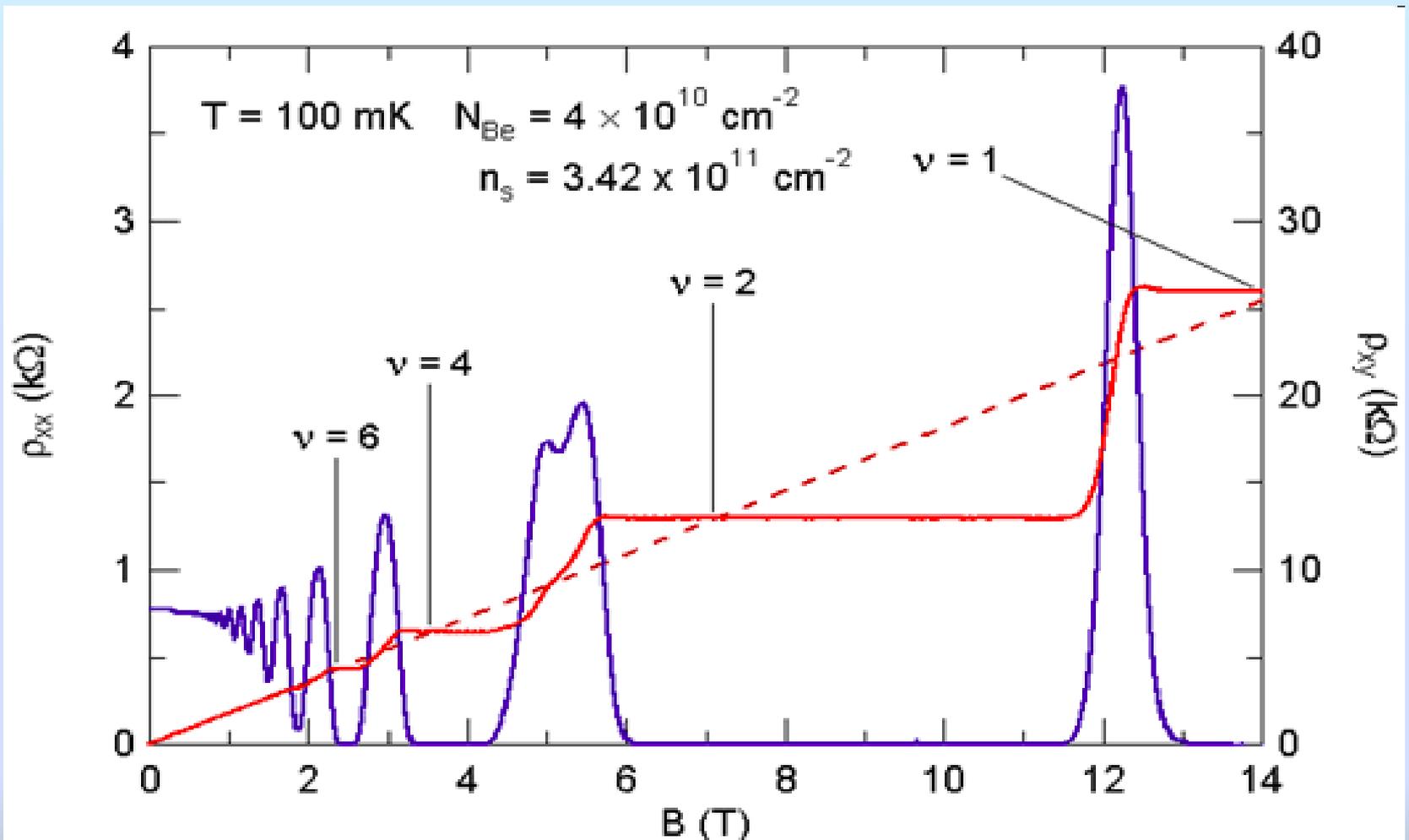
фаза Берри, квантовый инвариант,

согласованность квантовой электродинамики

и квантовой механики,....

# Summary

А так экспериментаторы видят КЭХ



**Спасибо за внимание!**

**Добро пожаловать в  
Центр им. В.Л. Гинзбурга ФИАН !**