

## Новая ОП

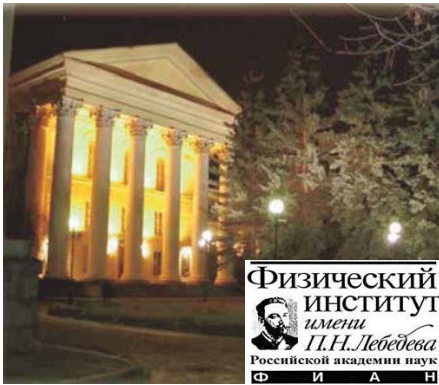
Физика сверхпроводимости и квантовых материалов

На кафедре «Физика и технология наноструктур»

Руководитель: В.М. Пудалов,  
([pudalov@lebedev.ru](mailto:pudalov@lebedev.ru)), 7(499)132-6780

База:

- ✓ Центр высокотемпературной сверхпроводимости и квантовых материалов им. В.Л. Гинзбурга («Центр Гинзбурга») Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН



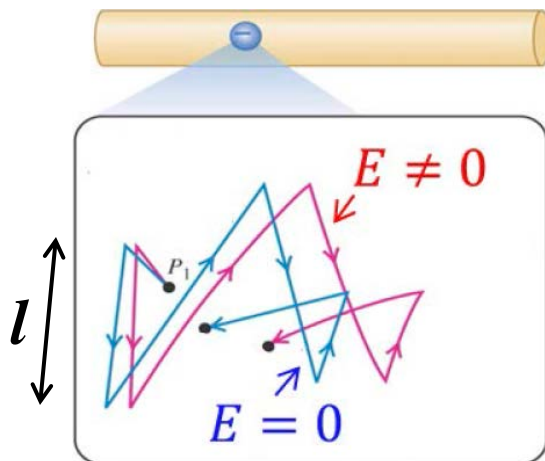
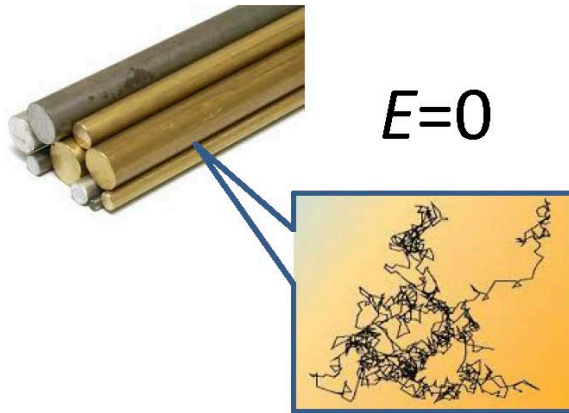
## Лекция 9.

# «Баллистическое распространение электронов по квантовым проводам»

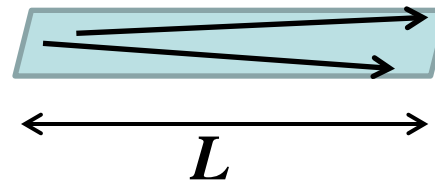
***В.М. Пудалов***

# Диффузионный и баллистический транспорт

Диффузионное движение:  $l \ll L$



Баллистическое движение:  $l > L$



Оценим  $l$  для Cu:

$$\sigma(T=300K) = 6 \cdot 10^5 / \Omega \cdot \text{см} \text{ и } n \approx 10^{23} \text{см}^{-3}$$

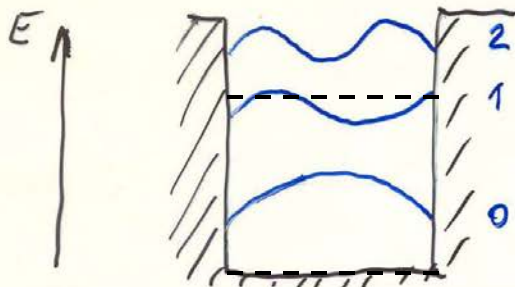
$$\tau = 10^{-14} \text{с} \text{ и } l = 1 \text{нм}$$

- Чистые образцы,
- Микро- и наноструктуры,
- Низкие температуры

## 2.3. Квантование энергии

skip

### А) Прямоугольная потенциальная яма

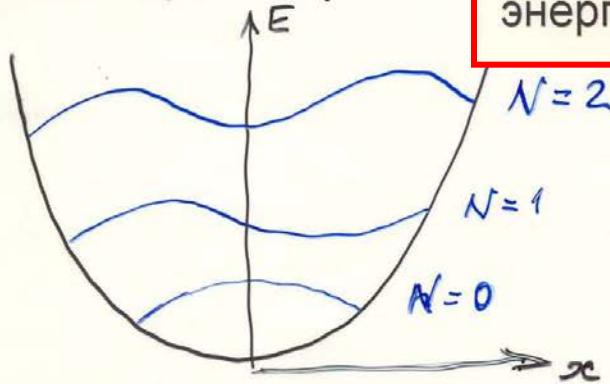


$$\begin{aligned}\delta p \delta x &= \hbar \\ \delta p &= p \text{ (1/2 периода)} \\ p &= \hbar/\lambda \\ E &= \hbar^2/(2m\lambda^2) \quad N=0\end{aligned}$$

$$E = \hbar^2(N+1)^2/(2m\lambda^2)$$

**Важно: у квантовой системы может быть несколько состояний! Состояние с наименьшей энергией - основное**

### В) Линейный осциллятор

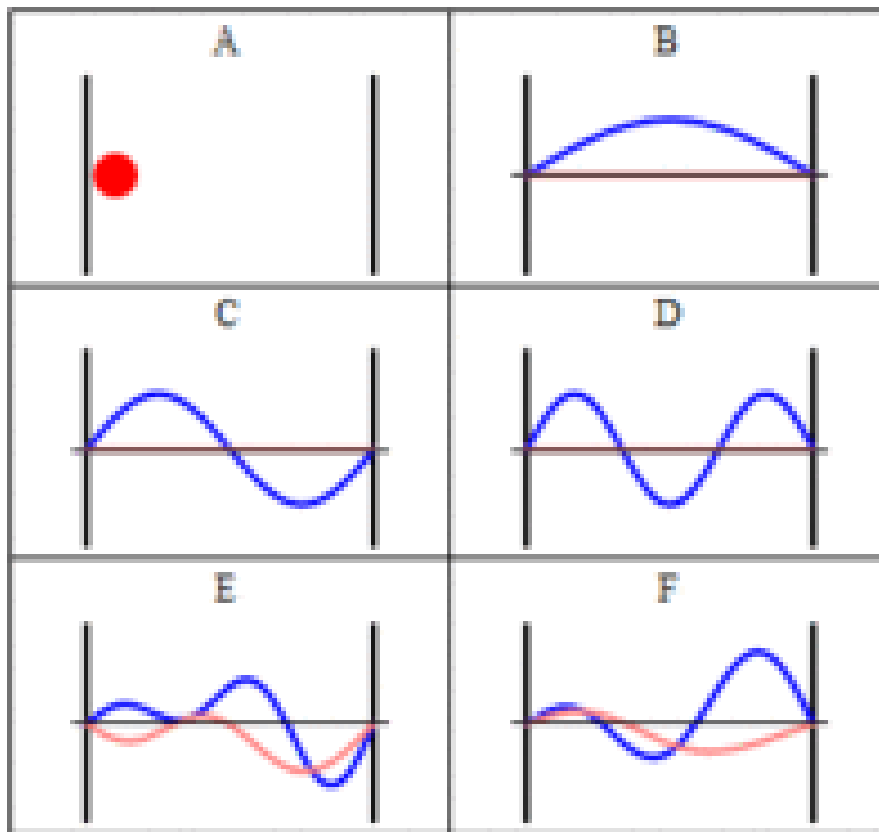


$$E_{pot} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$\omega$  - собственная частота колебаний  
(в классической механике)

$$E_N = (N+1/2)\hbar\omega$$

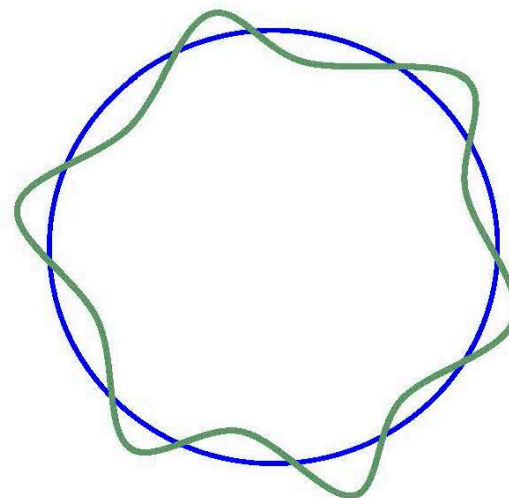
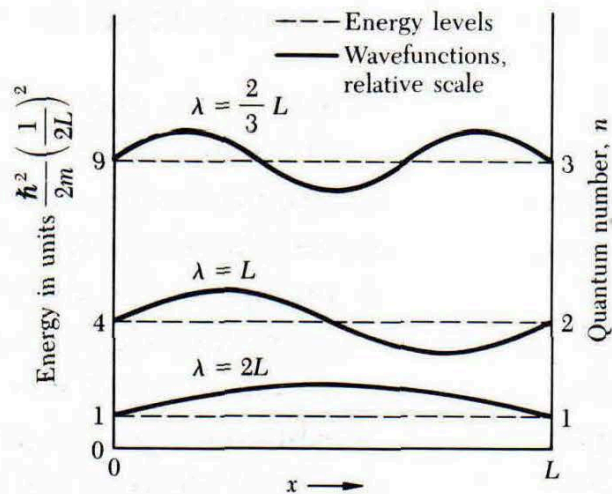
# Прямоугольная потенциальная яма в классической и квантовой механике



Решение – плоская волна  $\Psi(x)=A \sin(kx) - B\sin(kx)$

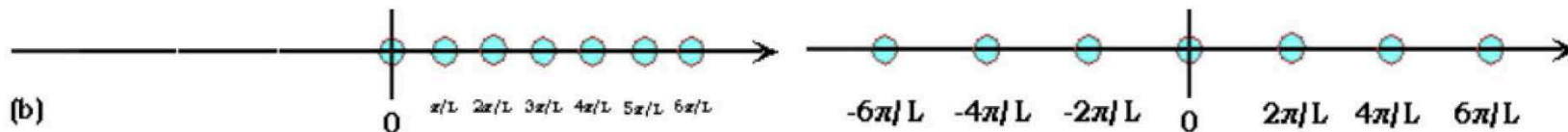
Гран. условия “ящика”

Периодические гран. условия



$$k = \pi/L, 2\pi/L, 3\pi/L \dots$$

$$k = \pm 2\pi/L, \pm 4\pi/L, \pm 6\pi/L \dots$$





# Подсчет числа состояний в 1D-Ферми газе

$$\psi(0) = \psi(L)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=L}$$

$$\sin(kL) = \sin(k0) = 0$$

$$k_n = \frac{2\pi n}{L},$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$N_{1D}(k)\delta k$  – число состояний в интервале от  $k$  до  $k+\delta k$

$$N_{1D}(k)\delta k \equiv \left( \frac{dN}{dk} \right) \delta k = 2 \frac{L}{2\pi} \delta k = \frac{L}{\pi} \delta k,$$

2 – спиновое  
вырождение

$$N(k)_d = \frac{g_s}{(2\pi)^d}$$

Плотность состояний по  
импульсу на 1 объема  
 $d$  - размерность пространства

# Плотность состояний по энергии (1D)

$$n_{1D}(E)\delta E = n_{1D}(E)\frac{dE}{dk}\delta k = 2n_{1D}(k)\delta k$$

2 значения  $\pm k$ ?  
Поэтому удваиваем  
для сведения к одной  
(+) полуоси

$$n_{1D}(E) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{1}{d\varepsilon/dk} \quad \text{Для свободного газа}$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$v = d\omega / dk = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{d\varepsilon}{dk} \right)$$

$$n_{1D}(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}}$$

$\equiv$

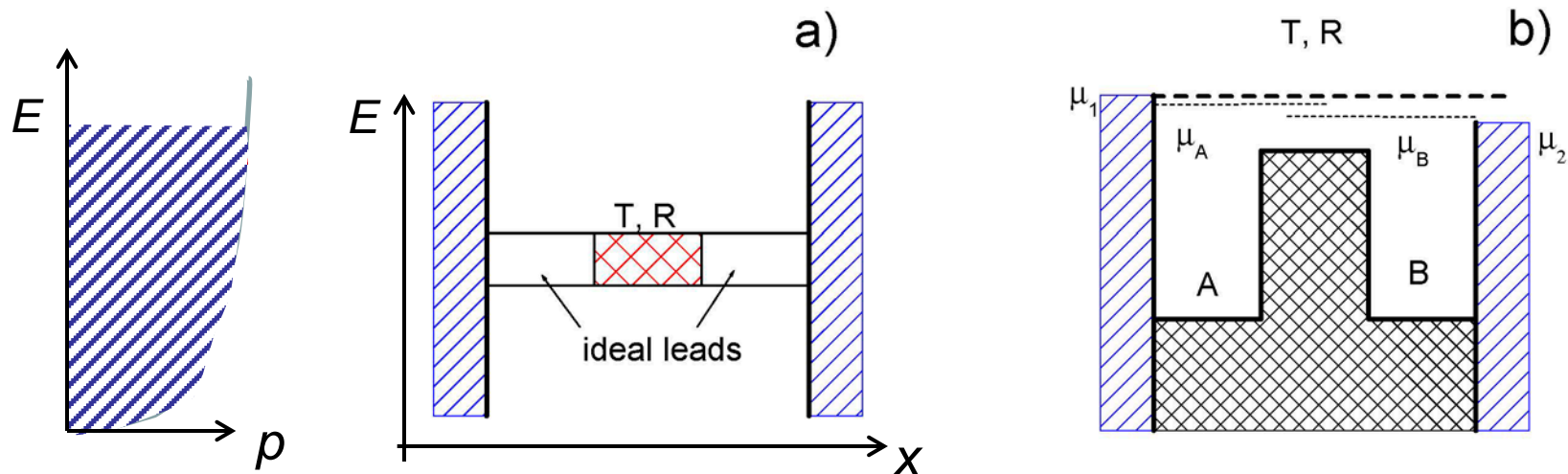
$$n_{1D}(E) = \frac{2}{\pi\hbar v(E)}$$



# Баллистический транспорт заряда

Теоретические идеи: Landauer (1957)

Экспериментальное открытие: B. J. van Wees, H. Van Houton, C. W. Beenakker et al. (1988); D. Wharam, et al. (1988).



Резервуары **L** и **R** поглощают все входящие в них электроны, а также выпускают в подводящие провода электроны с энергией  $< \mu_1, \mu_2$ .

**T, R** - коэффициенты прохождения и отражения, соответственно,  **$T+R=1$** ;

**v** - групповая скорость электронов в идеальных подводах и

**$dn_{\rightarrow}/dE = 1/(\pi\hbar v)$**  - плотность состояний для электронов движущихся  $\rightarrow$  в 1D системе.

Полный ток текущий через систему

$$I = ev \frac{dn_{\rightarrow}}{dE} T(\mu_1 - \mu_2) = \frac{e}{\pi \hbar} T(\mu_1 - \mu_2)$$

**скорость чудесным образом сократилась !**

Падение напряжения между контактами 1 и 2 равно  $V_{21} = (\mu_1 - \mu_2)/e$ .

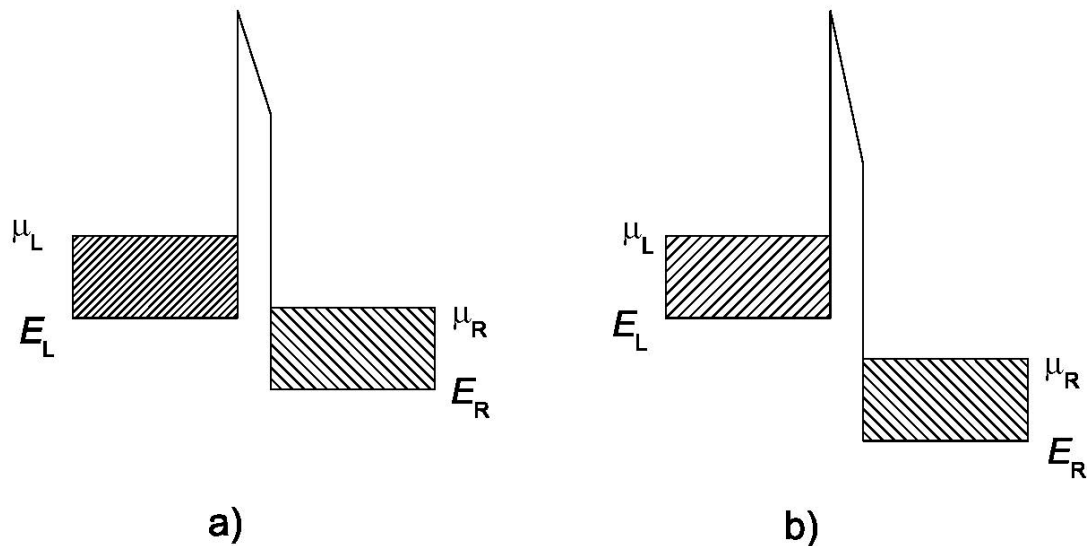
Двух-зажимная  
проводимость между  
точками 1 и 2

$$G = \frac{I}{V_{21}} \approx \frac{e^2}{\pi \hbar} T$$

Более точный анализ,  
с учетом подводящих  
проводов:

$$G = \frac{I}{V_{21}} = \frac{e^2}{\pi \hbar} \frac{T}{(1-T)}$$

Формула  
Ландауэра  
(LANDAUER,  
1957)



Барьер, разделяющий два Ферми-моря электронов, с положительным напряжением приложенным к правой стороне.  
 (a) случай малого приложенного напряжения,  
 (b) большое приложенное напряжение; электроны с правой стороны не вносят вклада в полный ток.

## Повторим вывод более подробно

Рассмотрим электроны, которые налетают на барьер с левой стороны и затем добавим электроны налетающие на барьер с правой стороны.

Ток вследствие электронов прилетающих слева  $I_L = n q v$

$$I_L = 2e \int_0^{\infty} f[\varepsilon(k), \mu_L] v(k) T(k) \frac{dk}{2\pi}$$

← Фазовый объем

Заменяем интегрирование по  $k$  интегрированием по энергии:

$$dk = \frac{dk}{dE} dE = \frac{1}{\hbar v} dE$$

← 1D плотность состояний

Подставим это в выражение для тока и обозначим дно зоны в левом и правом подводах  $E_L$  и  $E_R$ :

$$I_L = 2e \int_{E_L}^{\infty} f(E, \mu_L) v T(E) \frac{dE}{2\pi \hbar v} = \frac{2e}{h} \int_{E_L}^{\infty} f(E, \mu_L) T(E) dE.$$

Можно было бы ожидать, что состояния с большей энергией имеют большую скорость и поэтому будут вносить больший ток. Однако, скорость снова удивительным образом точно сокращается в этом выражении !

Ток от электронов движущихся справа налево

$$I_R = -\frac{2e}{h} \int_{E_R}^{\infty} f(E, \mu_R) T(E) dE.$$

Коэффициент прохождения  $T(E)$  одинаков (зеркальная симметрия и симметрия обращения времени). Складывая два выражения получим полный ток:

$$I = I_L + I_R = \frac{2e}{h} \int_{E_L}^{\infty} [f(E, \mu_L) - f(E, \mu_R)] T(E) dE.$$

Ток не пропорционален напряжению и, в общем случае, **закон Ома не выполняется !**

## 4 важных случая

(1) Приложено большое напряжение [ $V = (\mu_L - \mu_R)/e > \mu_L - E_L$ ], все состояния для электронов справа - ниже дна зоны электронов с левой стороны и потому не дают вклад в ток. В этом случае функция заполнения  $f(E, \mu_R)$  может быть опущена. Т.о., электроны с правой стороны не играют никакой роли вообще

(2) При низкой температуре  $T \ll T_F$  Ферми-функция распределения может быть заменена ступенчатой функцией. Только электроны с энергией в интервале от  $E_L$  до  $E_R$  вносят вклад в ток. В этом случае результат упрощается

$$I = \frac{2e}{h} \int_{\mu_R}^{\mu_L} T(E) dE$$

(3) Если напряжение смещения мало (по сравнению с  $\mu/e$ ), то разность Ферми- функций распределения может быть разложена в наинизшем приближении. Положим  $\mu_L = \mu + (1/2)eV$  и  $\mu_R = \mu - (1/2)eV$ , где  $\mu$  - положение уровня Ферми в равновесии. Тогда

$$f(E, \mu_L) - f(E, \mu_R) \approx eV \frac{df(E, \mu)}{d\mu} = -eV \frac{df(E, \mu)}{dE}$$

$$I = \frac{2e^2 V}{h} \int_{E_L}^{\infty} \left( \frac{-df}{dE} \right) T(E) dE$$

Получили результат в **Омическом режиме**, когда ток пропорционален приложенному напряжению. В этом режиме проводимость  $G = I/V$  дается выражением

$$G = \frac{2e^2}{h} \int_{E_L}^{\infty} \left( -\frac{df}{dE} \right) T(E) dE$$

(4) При  $T \ll T_F$ , когда функция распределения является намного более резкой чем любые особенности в  $T(E)$ , можно заменить  $-df/dE = \delta(E - \mu)$  в проводимости. Тогда интеграл сводится к локальному значению при  $E = \mu$

и мы получаем замечательно простой результат:

$$G = \frac{2e^2}{h} T(\mu)$$



## Многоканальный случай

Пусть система имеет дискретные уровни энергии  $E_i$  и, соответственно имеет  $N_{\perp}$  проводящих каналов на уровне Ферми  $E_F$ . Каждый канал характеризуется своим продольным волновым вектором  $k_i$ ,

Чему равно  $N_{\perp}$  ?

Возьмем 1D канал шириной  $W = \lambda_F/2$ . В нем только один уровень размерного квантования, двукратно вырожденный по спину  $N_{\perp} = 2W/(\lambda_F/2) = 2$ . Если канал в 2 раза шире,  $W = \lambda_F$ , то в нем поместятся два уровня размерного квантования, с

$\lambda_F/2 = W$  и  $\lambda_F = W$ . Т.о., в 1D-канале число уровней  $N_{\perp} = 2 \times 2W/\lambda_F$  (коэффициент 2 – вследствие спинового вырождения).

В терминах волновых чисел

$$\begin{aligned} N_{\perp}^{(1D)} &= 2Wk_F/\pi & W &- \text{ширина} \\ N_{\perp}^{(2D)} &= Ak_F^2/\pi^2 & A &- \text{площадь сечения} \end{aligned}$$

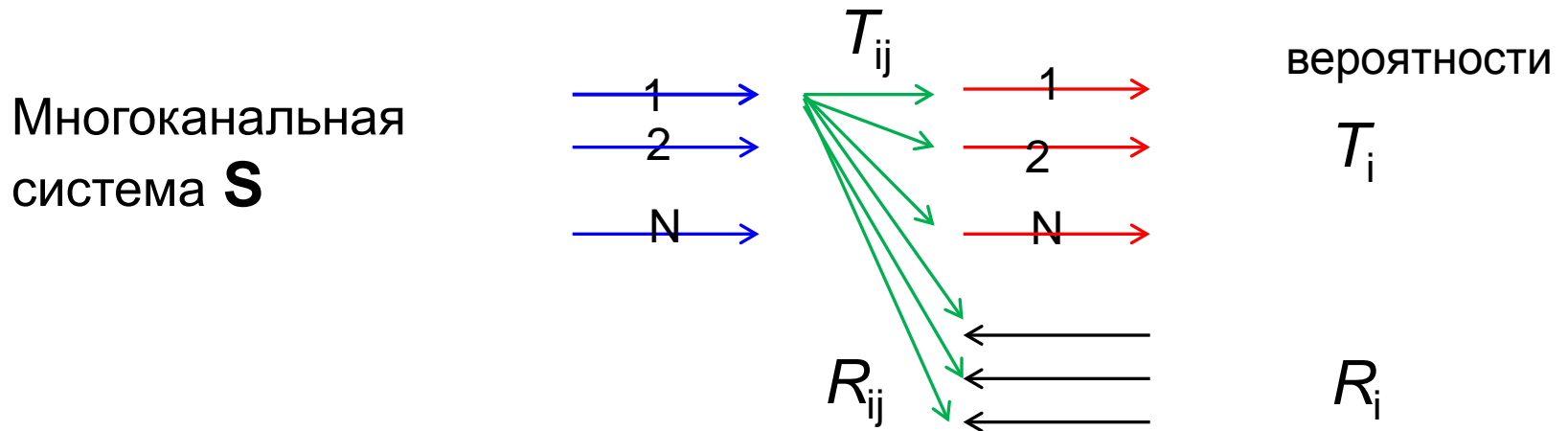
# Рассеяние в многоканальной системе

Все подводящие каналы -

(1): с левой стороны, идущие направо, и

(2) с правой стороны, идущие налево -

подпитываются электронами из соответствующих резервуаров с хим. потенциалами  $\mu_1, \mu_2$ , соответственно.

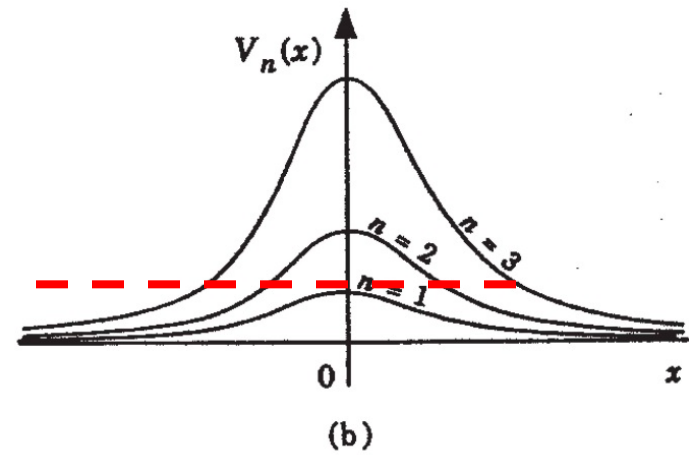
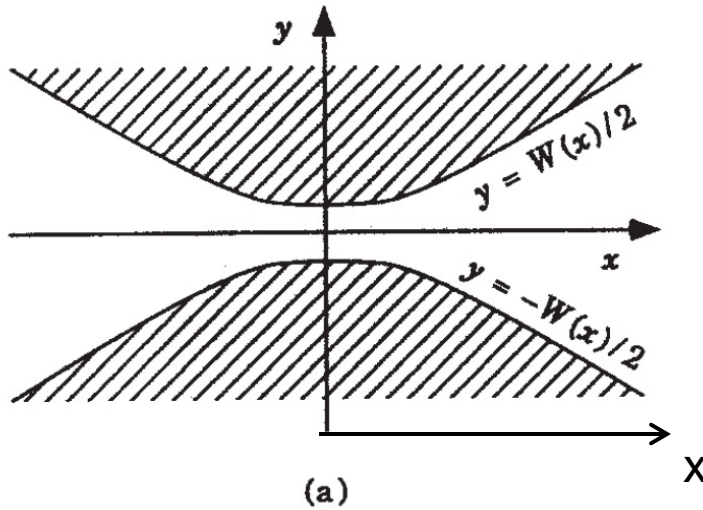


$$T_i = \sum_j T_{ij}$$

$$R_i = \sum_j R_{ij}$$

$$G_i = \frac{2e^2}{h} T_i(\mu)$$

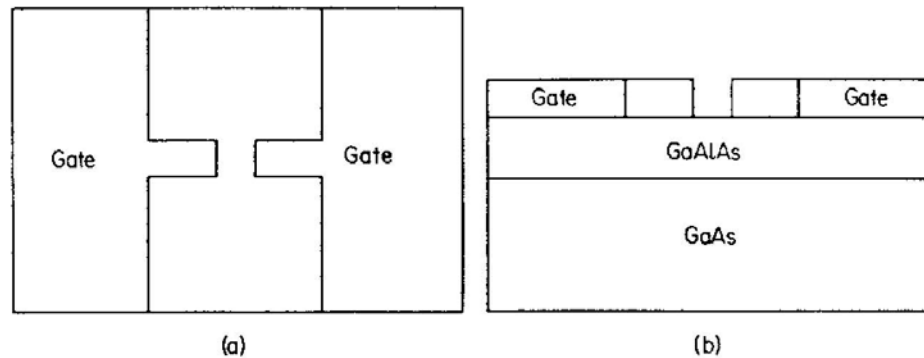
# Пример



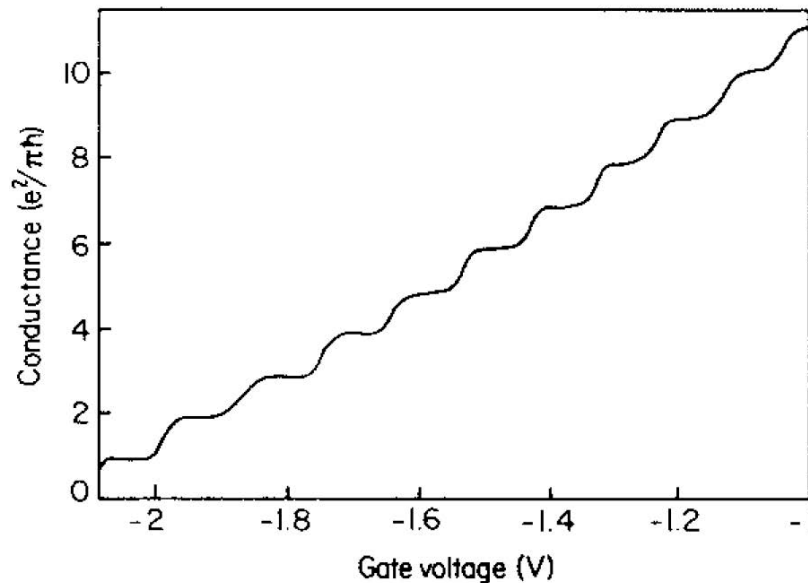
Энергии поперечных мод

Проводимость сужения близка к  $2(e^2/h) \times 1$

# Квантовый точечный контакт (Quantum Point Contact, QPC)



$$G = \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{2e^2}{h} \quad N_{\max} = k_F W / \pi$$

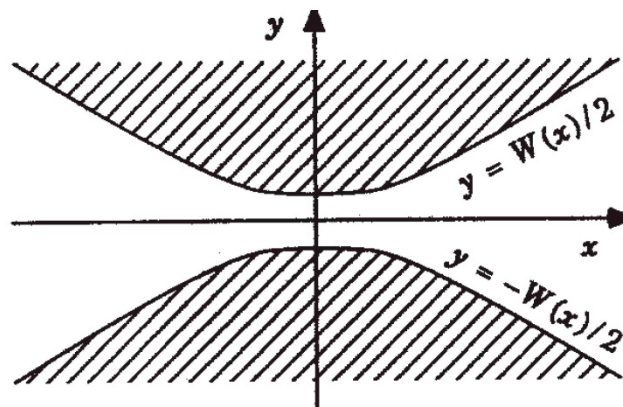


Изменение кондактанса при изменении эффективной ширины канала от 0 до 360нм.  
van Wees et al. PRL 60, 848 (1988)

# Простая модель QPC

(2DEG) заключен в области  $|y| \leq W(x)/2$  в плоскости  $x - y$ , путем создания бесконечно высокой потенциальной стенки при  $y = \pm W(x)/2$ . Поместим начало отсчета ( $x = 0$ ) в место наибольшего сужения

собственные состояния этой модельной системы следуют из уравнения Шредингера



$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, y) + V(x, y) \Psi = E \Psi(x, y)$$

С гран. условиями

$$\Psi(x, \pm W(x)/2) = 0$$

Решением этого уравнения является многомодовая волновая функция  $\Psi_n(x,y)$ , отвечающая эффективному потенциалу

$$V_n(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{W(x)} \right)^2$$

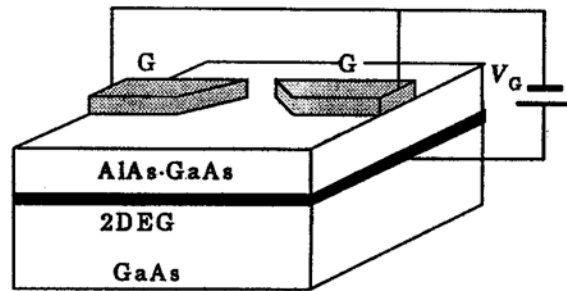
Электроны каждой моды вносят независимый вклад в ток

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

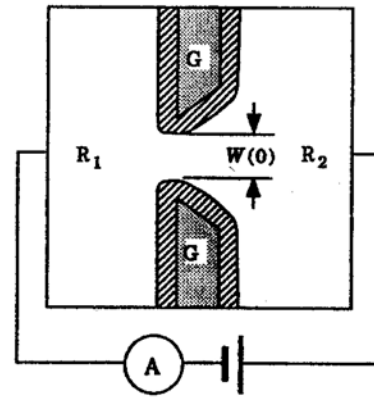
Если потенциал  $W(x)$  изменяется медленно, то зависимость  $T_n(E)$  -как в классике

$$T_n \approx \begin{cases} 1 & E_F > V_n(0) \\ 0 & E_F < V_n(0) \end{cases}$$

# Пример практического устройства с QPC



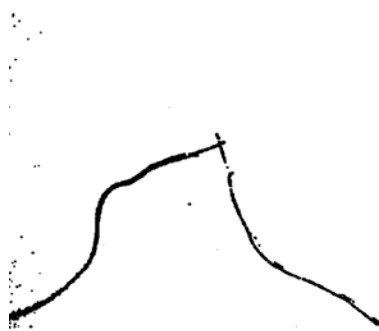
(a)



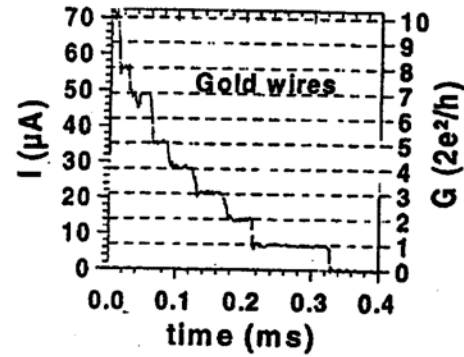
(b)



# Школьный эксперимент: качающиеся проволоочки

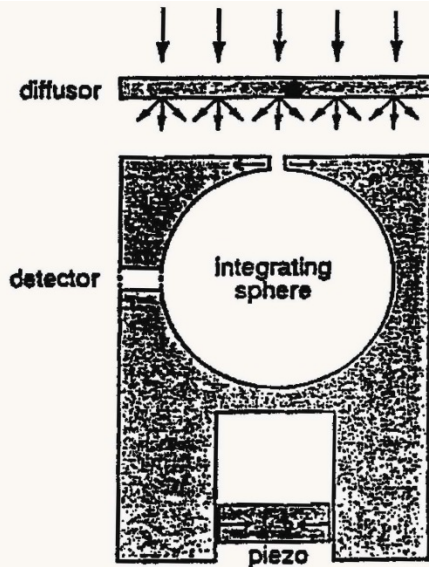


a.

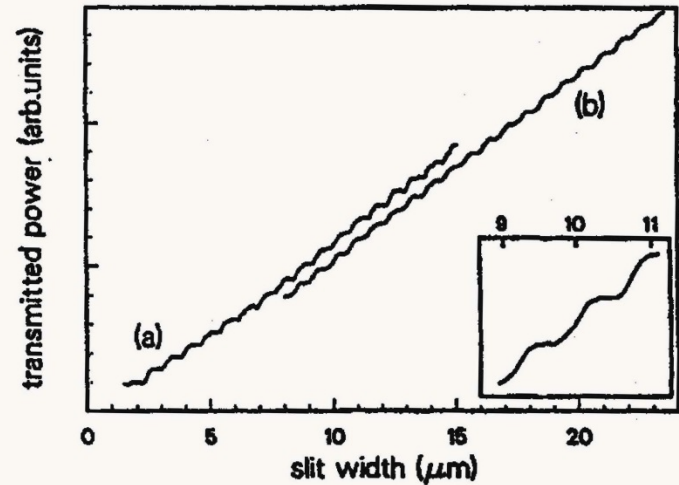


b.

Аналогия в оптике ( $\lambda=1.55\mu$ )



a



b

## Магнитное поле. Вектор-потенциал

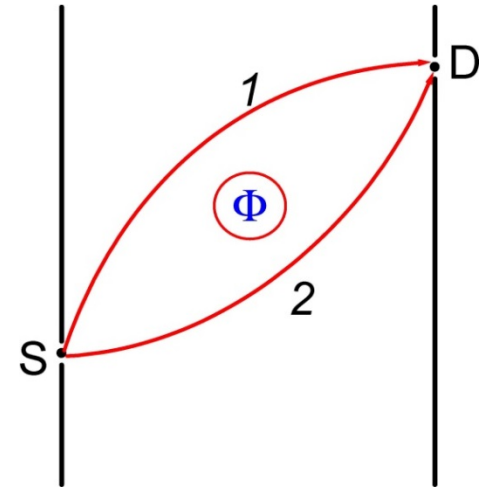
## 2D система в магнитном поле $B_{\perp}$ : эффект Аронова-Бома (Aharonov-Bohm)

Для волны распространяющейся по пути  $i$

$$\psi_i(r) = \exp[-i\theta_i(r)]\psi_i^0(r)$$

$\psi_i^0(r)$  – волн. функция в отсутствие  $\mathbf{A}$

$$\theta_i(r) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_S^D \mathbf{A} dr_i \quad \Phi_0 = \frac{hc}{e}$$



$$|\psi_1(D) + \psi_2(D)|^2 = |\psi_1(D)|^2 + |\psi_2(D)|^2 + 2 \operatorname{Re} \psi_1^*(D) \psi_2(D) \approx 2 |\psi_1^0(D)|^2 [1 + \cos[\xi_E(D) + \theta_1 - \theta_2]]$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left[ \int_S^D \mathbf{A} dr_1 - \int_S^D \mathbf{A} dr_2 \right] = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \operatorname{rot} \mathbf{A}(s) ds = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Было предположено, что  $\Psi_1(D) \approx \Psi_2(D)$

и введено обозначение  $\Psi_1^{0*}(D)\Psi_2^0(D) = |\Psi_1^0|^2 \exp[i\xi_E(D)]$

Электроны распространяются в области, в которой магнитное поле равно нулю, однако на них действует вектор потенциал поля.

## Другой вывод выражения для эффекта АВ

$$p = \hbar k = mv + (e/c)A$$

Изменение импульсы  $\rightarrow$  изменение фазы, даже если  $H=0$

Полное изменение фазы

$$\Delta\phi = \int \mathbf{k} d\mathbf{l} = \frac{1}{\hbar} \int \left( m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = \Delta\phi_v + \Delta\phi_A$$

Фазовый сдвиг, индуцируемый вектор-потенциалом

$$\Delta\phi_A = \frac{e}{\hbar c} \int \mathbf{A} d\mathbf{l}$$

$$\Delta\phi_A = \frac{e}{\hbar c} \int \bar{A}d\bar{l} = \frac{e}{\hbar c} \oint (\text{rot}\bar{A}d\bar{S}) = \frac{e}{\hbar c} BS = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Окружаемый траекторией поток называется потоком Аронова-Бома

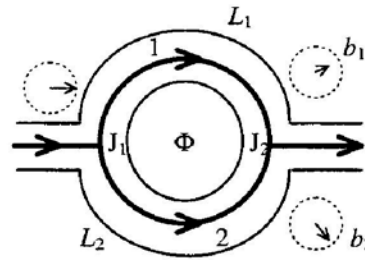
## **Эффекты Аронова-Бома (АВ) и Альтшулера-Аронова-Спивака**

Б. Альтшулер, А. Аронов, Б. Спивак, JETP Lett. 33, 101 (1981)

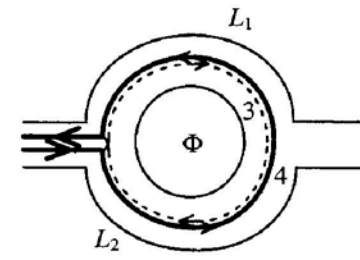
Ю.В. Шарвин, Д.Ю. Шарвин, Б. Альтшулер и др., Письма в ЖЭТФ.

Траектории типа 1 и 2.  
 $\Delta\phi$  будет увеличиваться на  $2\pi$  каждый раз когда один квант потока добавляется в кольцо.

Период осцилляций  $\Phi_0$

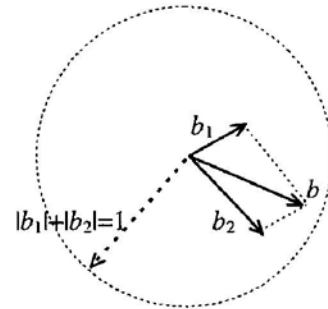


a.

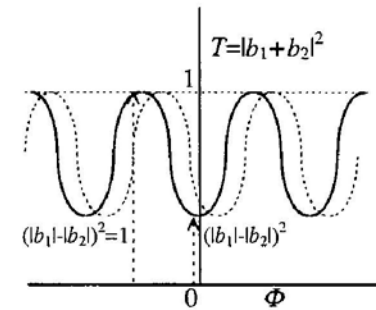


b.

Траектории - 3 и 4. Их интерференция при  $\Phi = 0$  также дает эффективное рассеяние назад. При  $V \neq 0$  фазы, набираемые двумя



c.



d.

$$\Delta\phi_3 = +2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

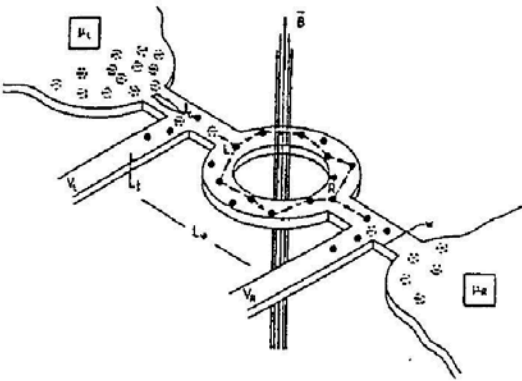
$$\Delta\phi_4 = -2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = -\Delta\phi_3.$$

Разность фаз  $\Delta\phi_3 - \Delta\phi_4$  в два раза больше чем между волнами 1 и 2, поэтому осцилляции будут в два раза чаще, чем в эффекте АВ.

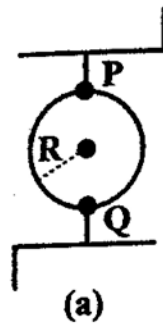
Этот эффект, наблюдаемый впервые Ю.В. Шарвиным и Д.Ю. Шарвиным называется осцилляциями Альтшулера-Аронова-Спивака (ААС).



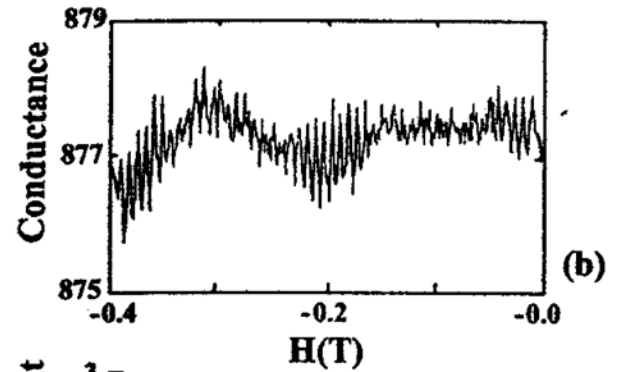
Золотое кольцо в эксперименте (R.Webb). Диаметр 825нм, ширина 40нм.



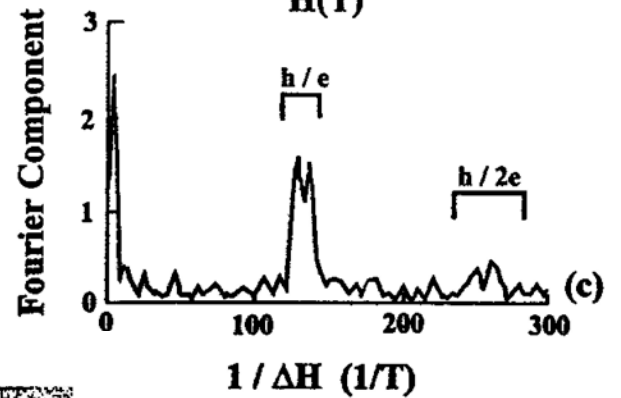
a.



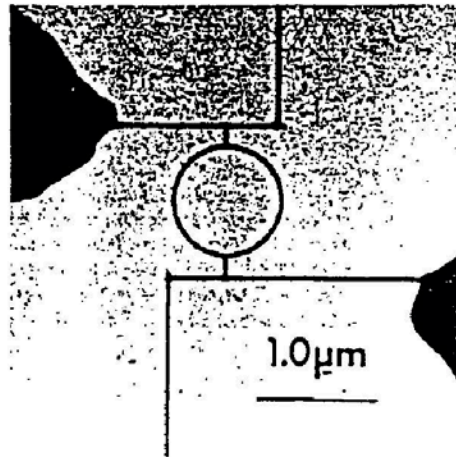
(a)



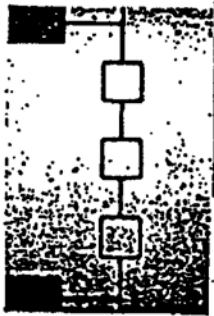
(b)



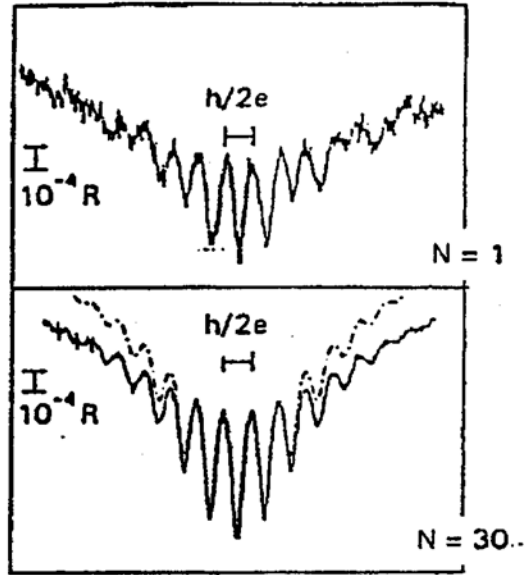
(c)



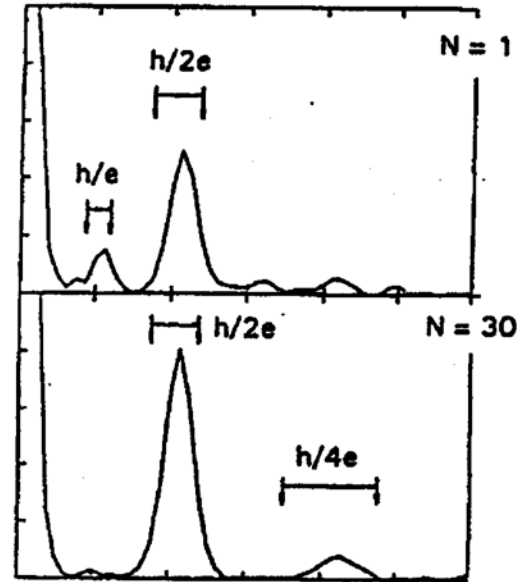
b.



a.



b.



c.

**Центр сверхпроводимости и  
квантовых материалов им.  
В.Л.Гинзбурга  
ФИАН**