

# Глава 15

## Квантовый эффект Холла. Диффузионная модель

### План

- Введение. Классическое описание движения электронов в магнитном поле
- Проводимость в перпендикулярном магнитном поле,  $\tau$ -приближение
- Экспериментальное наблюдение квантового эффекта Холла
- Классическая динамика электрона в перпендикулярном магнитном поле
- Квантование Ландау
- Коммутационные соотношения и кратность вырождения уровней
- Разделение ролей магнитных потоков в воображаемой геометрии Лафлина. Связь квантов потока и переноса единичного заряда между берегами

- Краевые состояния и трактовка КЭХ в рамках краевых состояний
- Квантовый топологический инвариант в КЭХ (Протектор)
- Симметричные соотношения в КЭХ и глобальная фазовая диаграмма КЭХ

## 15.1 Введение. Классическое описание движения электронов в магнитном поле

Рассмотрим макроскопически однородную и изотропную 2D систему - пластину размерами  $(L_x, L_y)$ . Пропуская через нее слабый ток  $I_x, I_y$  получим падения напряжения

$$\begin{aligned} U_x &= RI_x + R_{xy}I_y \\ U_y &= -R_{xy}I_x + \tilde{R}I_y, \end{aligned} \quad (15.1)$$

где  $R, \tilde{R}$  – диагональные сопротивления и  $R_{xy} \equiv R_H$  – Холловское сопротивление. Обычно измерения делаются в условиях  $I_y = 0$ , и тогда результаты измерений описываются законом Ома и эффектом Холла:

$$\begin{aligned} U_x &= RI_x \\ U_y &= -R_H I_x \end{aligned} \quad (15.2)$$

Предположим далее, что электрическое поле  $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$  распределено по образцу макроскопически однородно, т.е.  $E_x = U_x/L_x$ ,  $E_y = U_y/L_y$ . Тогда в терминах компонент плотности тока  $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$ ,  $j_x = I_x/L_y$ ,  $j_y = I_y/L_x$  можно переписать:

$$E_\mu = \sum_\nu \rho_{\mu\nu} j_\nu \quad (15.3)$$

где, очевидно,  $\rho_{xx} = \rho_{yy} = RL_y/L_x = \tilde{R}L_x/L_y$ . Отметим сразу же, что в двумерной системе Холловская компонента  $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = R_H$  не зависит от размера, тогда как диагональная  $\rho_{xx} = RL_y/L_x$  зависит от отношения геометрических размеров  $L_y/L_x$ , которое обычно известно с плохой точностью. В

теории обычно принято рассматривать входными параметрами компоненты электрического поля и тогда откликом системы является электрический ток

$$j_\mu = \sum_\nu \sigma_{\mu\nu} E_\nu. \quad (15.4)$$

Компоненты тензора проводимости  $\sigma_{\mu\nu} = \rho_{\mu\nu}^{-1}$  находятся инвертирование тензора сопротивления и в двумерном случае равны

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} = \frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Отметим замечательное свойство: если  $\rho_{xy} \neq 0$ , точнее  $\rho_{xy} \gg \rho_{xx}$  то проводимость  $\sigma_{xx}$  и удельное сопротивление  $\rho_{xx}$  пропорциональны друг другу и если одна из этих величин стремится к нулю, то так же исчезает и другая. Поэтому состояние 2D системы в режиме  $\rho_{xx} \rightarrow 0$ ;  $\rho_{xy} \neq 0$ , т.е. квантовом эффекте Холла, является одновременно изолятором и идеальным металлом. Парадоса здесь нет, поскольку вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  не параллельны в присутствии перпендикулярного магнитного поля. Физическая размерность проводимости [(заряд)<sup>2</sup>/действие], что можно выразить в терминах фундаментальных констант  $e$  и  $h$ . Т.о. естественным размером проводимости является величина  $e^2/h = 1/25812$  Ом.

А что такое действие ? В 18-м веке принцип наименьшего действия был введен Мопертюи как аргумент разумности свышеустройства мира. Затем Лагранж формализовал его

$$S = \int L(q, \dot{q}, x, t) dt \quad (15.6)$$

### 15.1. Введение. Классическое описание движения электронов в магнитном поле<sup>5</sup>

где  $t$  — время,  $q = q_1, q_2, \dots, q_N$  — полный набор координат, характеризующих динамическую систему (её конфигурационное пространство),  $\dot{q} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N\}$  — набор скоростей (производных  $q$  по времени),  $L$  — функция Лагранжа. В квантовой механике, в формулировке интегралов по траекториям, физическая система одновременно следует всем возможным траекториям, причём амплитуда вероятности следования определённой траектории определяется действием этой траектории. Если характерное действие намного больше постоянной Планка, то амплитуда классической траектории с наименьшим действием является преобладающей — таким образом квантовая механика переходит в классическую. Действие имеет смысл фазы волновой функции  $S = \hbar\phi$ , где  $S$  — действие,  $\phi$  — фаза в радианах, а  $\hbar$  — универсальная постоянная Планка).

Классическая физика (механика и теория поля) является высокочастотным и коротковолновым приближением квантовой, когда фазы волн очень велики ( $S/\hbar \gg 1$ ), что означает, что при данных (классических) условиях эксперимента (характерные размеры, характерные импульсы и характерные энергии рассматриваемой задачи) квантовые поправки к классической теории будут достаточно малы (на практике чаще всего настолько малы, что экспериментально не обнаружимы). В этом случае квантовая задача в целом сильно упрощается, переходя в классическую, и можно пользоваться принципом наименьшего действия, в котором действие продолжает играть ключевую роль.

### 15.1.1 Проводимость в перпендикулярном магнитном поле, $\tau$ -приближение

Уравнение движения в классической модели с трением

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} - e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau}\mathbf{v}. \quad (15.7)$$

Для постоянного времени релаксации  $\tau$  и средней плотности тока  $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$  это уравнение имеет известное решение для стационарного состояния  $\dot{\mathbf{v}} = 0$ :

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{(\omega_c\tau)\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2} = -(\omega_c\tau)\sigma_{xx}. \quad (15.8)$$

Здесь  $\omega_c = eH/mc$  – циклотронная частота и  $\sigma_0 = ne^2\tau/m$  – проводимость в нулевом поле.

1. Посмотрим на предельные случаи, следующие из формул (15.8). В исчезающе слабом магнитном поле  $\omega_c\tau \ll 1$

$$\sigma_{xx} \approx \sigma_0 \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (15.9)$$

В другом предельном случае – сильных полей  $\omega_c\tau \gg 1$

$$\sigma_{xx} \approx \frac{\sigma_0}{(\omega_c\tau)^2} \propto \frac{1}{\tau} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty \quad (15.10)$$

Т.о., наличие трения (рассеяния) необходимо для того, чтобы проводимость не расходилась в нулевом поле и не исчезала в сильном поле.

2. Для компонент тензора сопротивления после несложной арифметики находим, что

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (15.11)$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{H}{nec} = \frac{1}{\sigma_{xy}}. \quad (15.12)$$

15.1. Введение. Классическое описание движения электронов в магнитном поле 7

Таким образом, в диагональной компоненте магнитное поле чудесным образом исчезло и осталось только “трение”,  $\rho_{xx} = \sigma_0^{-1}$ , тогда как в холловской компоненте “трение” исчезло и  $\rho_{xy} = \sigma_{xy}^{-1} = H/nec$ . Этот факт, а именно, то что диагональная компонента тензора сопротивления для свободного электронного газа не зависят от магнитного поля, а недиагональная компонента - не зависит от трения, справедлив для свободного невзаимодействующего электронного газа. При учете электрон-электронных взаимодействий (т.е. для Ферми жидкости) или для локализованных электронов (прыжковый транспорт) в  $\rho_{xx}$  возникает зависимость от магнитного поля, из которой можно находить количественные характеристики электрон-электронного взаимодействия. Данные вопросы рассматриваются в Главе про Ферми-жидкостные эффекты.

3. Как диагональная проводимость  $\sigma_0$ , так и классическая Холловская проводимость  $\sigma_H^0$  для свободного электронного газа пропорциональны концентрации носителей  $n$ .

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= n e \mu \\ \sigma_H^0 &= n \left( \frac{e^2}{h} \right) \left( \frac{hc}{e} \right) \frac{1}{H} = n \left( \frac{e^2}{h} \right) \frac{\Phi_0}{\Phi} \end{aligned} \quad (15.13)$$

Последнее соотношение можно интерпретировать иначе, если мы под концентрацией будем понимать безразмерное отношение

$$\nu = n \frac{hc}{eH}, \quad \text{то } \sigma_{xy} \text{ приобретает вид} \quad \sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (15.14)$$

Здесь

$$\nu = n(2\pi l_H^2), \quad (15.15)$$

и  $l_H = \sqrt{\hbar c / eH}$  – магнитная длина, т.е. радиус наименьшей циклотронной орбиты, соответствующей основному состоянию

осциллятора с энергией  $\varepsilon_0 = \hbar\omega_c/2$ . Выражение 15.15 дает безразмерную концентрацию – т.н. коэффициент заполнения (filling factor). В другой очевидной форме коэффициент заполнения

$$\nu = n \frac{\Phi_0}{\Phi}, \quad (15.16)$$

равен отношению числа электронов к числу квантов потока, что подчеркивает связь электронов с квантами потока в сильном магнитном поле.

### 15.1.2 Классическая динамика электрона в перпендикулярном магнитном поле

Классическое движение электрона магнитном поле  $\mathbf{H}$  (электрическое поле отсутствует и газ идеальный  $\tau = \infty$ ):

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (15.17)$$

Для однородного и постоянного поля  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  общее решение таково:

$$\begin{aligned} x(t) &= X + R \sin(\omega_c t + \alpha) \\ y(t) &= Y + R \cos(\omega_c t + \alpha) \end{aligned} \quad (15.18)$$

Эти уравнения описывают круговое движение с центром координат  $X, Y$  и радиусом  $R$ . Введем относительные координаты  $(\zeta, \eta)$ :

$$x = X + \zeta, \quad y = Y + \eta \quad (15.19)$$

которые очевидно связаны с компонентами скорости

$$\zeta = v_y/\omega_c, \quad \eta = -v_x/\omega_c. \quad (15.20)$$



15.1. Введение. Классическое описание движения электронов в магнитном поле 9

Гамильтониан, соответствующий этой классической модели без-столкновительного газа

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (15.21)$$

где  $\mathbf{A}$  – вектор-потенциал,  $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$  и  $\mathbf{p}$  – канонический импульс, связанный со скоростью формулой

$$v = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (15.22)$$

В калибровке  $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$  импульс в направлении  $y$  является константой и связан с координатой соотношением

$$p_y = -\frac{e}{c} H X \quad (15.23)$$

Иными словами, движение изображающей точки в импульсном пространстве подобно движению в координатном пространстве, но масштабировано на  $eH/c$  и повернуто на  $\pi/2$ .

Если в дополнение к силе Лоренца присутствует сила  $F = -\nabla U$ , то центр орбиты и относительные координаты удовлетворяют очевидным уравнениям движения, которые прямо получаются из закона Ньютона и уравнений 15.23

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{F} \\ \dot{X} &= -\frac{c}{eH} F_y, & \dot{Y} &= \frac{c}{eH} F_x \end{aligned} \quad (15.24)$$

$$\dot{\zeta} = -\omega_c \eta + \frac{c}{eH} F_y, \quad \dot{\eta} = \omega_c \zeta - \frac{c}{eH} F_x. \quad (15.25)$$

В присутствии электрического поля  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$  приложенного в плоскости циклотронного вращения, вдоль оси  $X$ , возникает стационарный дрейф электронов по оси  $y$  со скоростью  $\mathbf{v}_D = (0, v_D, 0)$ , где  $v_D = -E/H$ . В калибровке Ландау

$\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$  уравнения решаются (см. §112 Квантовой механики Ландау) и общее решение:

$$X(t) = X, \quad Y(t) = Y + v_d t \quad (15.26)$$

$$\zeta(t) = R \sin(\omega_c t + \alpha) + v_D / \omega_c \quad (15.27)$$

$$\eta(t) = R \cos(\omega_c t + \alpha) \quad (15.28)$$

Это движение есть суперпозиция циклотронного движения вокруг центра  $(X + v_D / \omega_c, Y)$  и дрейфовое движение вдоль  $y$ -оси со скоростью  $v_D$ . В результате возникает циклоида ось которой перпендикулярна обоим полям. Относительное движение

$$\dot{\zeta} = -\omega_c \eta, \quad \dot{\eta} = \omega_c \zeta \quad (15.29)$$

есть циклотронное вращение с частотой  $\omega_c$ .

### 15.1.3 Квантование Ландау

Пусть магнитное поле приложено перпендикулярно  $XU$ -плоскости. Поскольку движение электрона в магнитном поле ограничено в плоскости, то размерность эффективно уменьшается на 2 и возникают квантованные уровни энергии. Посмотрим снова на Гамильтониан

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \left[ \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \quad (15.30)$$

и снова выберем калибровку Ландау  $\mathbf{A} = (0, Hx)$ . Тогда Гамильтониан:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \left[ p_x^2 + \left( p_y + \frac{eH}{c} x \right)^2 \right] \quad (15.31)$$

Поскольку координата  $y$  не входит в  $\mathcal{H}_0$ , то переменные разделяются и волновая функция может быть факторизована

$$\psi = \frac{1}{L^{1/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_y y\right) \chi(x), \quad (15.32)$$

где  $\chi(x)$  определяется решением уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \chi'' + \frac{m}{2} \omega_c^2 (x - X)^2 \chi = E \chi, \quad (15.33)$$

где  $X = c p_y / e H$  — координата центра циклотронного вращения. Решение уравнения гармонического осциллятора (см §23 и §112 Квантовой механики Ландау):

$$\chi_N(x) = (2^N N! \pi^{1/2} l)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) H_N\left(\frac{x}{l}\right) \quad (15.34)$$

с  $H_N$ -полиномом Эрмита и  $l_H = (c\hbar/eH)^{1/2}$  — радиусом циклотронной орбиты. Собственные значения энергии

$$E_N = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c. \quad (15.35)$$

и полная волновая функция

$$\psi_{N\chi}(r) = \frac{1}{L^{1/2}} \exp\left(-i \frac{X y}{l_H^2}\right) \chi_N(x - X). \quad (15.36)$$

Эта волновая функция представляет собой плоскую волну в направлении  $y$  и собственное состояние гармонического осциллятора центрированного по оси  $x$  в точке  $X = -l_H^2 k_y$ . Это называется волновая функция Ландау. Важно, что она имеет заметную амплитуду в районе шириной

$$l_N = (2N + 1)^{1/2} l_H, \quad (15.37)$$

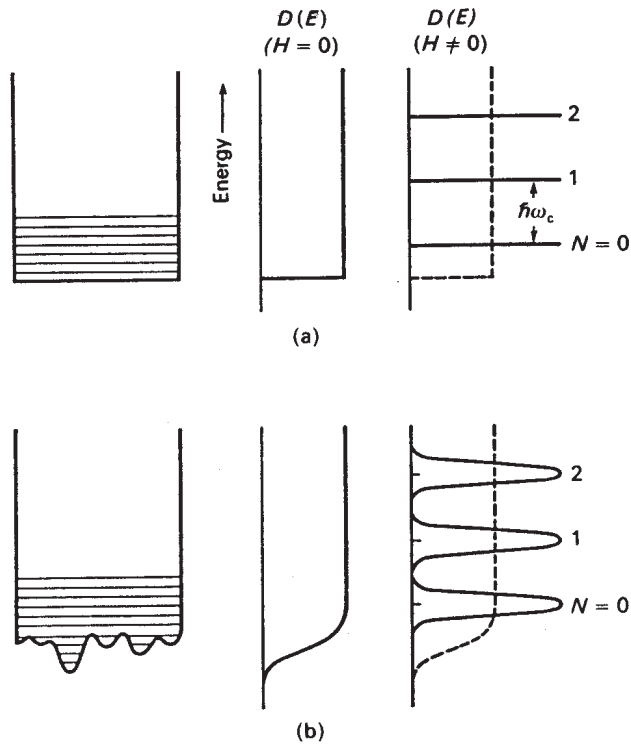


Рис. 15.1: Схематический энергетический спектр двумерной электронной системы с и без магнитного поля. (а)—идеальная система. (б)—система с беспорядком.

т.е., на размере циклотронного радиуса для  $N$ -го уровня Ландау.

В волновой функции Ландау координаты  $x$  и  $y$  входят по-разному, что есть просто следствие выбранной калибровки. Если выбрать иную, например симметричную калибровку для того же случая магнитного поля  $\mathbf{H} = H\hat{z}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{H} \times \vec{r} = \left( -\frac{H}{2}y, \frac{H}{2}x \right) \equiv \frac{1}{2}H(-y\hat{x} + x\hat{y}), \quad (15.38)$$

то волновая функция будет представлять собой линейный гармонический осциллятор в переменных  $(x + iy)$ . Здесь использовано  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  и  $\hat{z}$  для обозначения единичных векторов в системе прямоугольных координат. Действительно, уравнению Шредингера  $(\mathcal{H} - E)\Psi(\vec{r}) = 0$  отвечают собственные состояния

$$\Psi_{nm}(r\phi) = \exp(im\phi)u_{nm}(r), \quad (15.39)$$

$$E_{nm} = \frac{1}{2}\hbar\omega_c(2n + 1 + m + |m|), \quad (15.40)$$

с  $m \leq n$ . Радиальная функция  $u(r)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \left( \frac{m^2}{x} + x^2 - \epsilon \right) u = 0, \quad (15.41)$$

где  $x^2 = (eH/2\hbar c)r^2$  и  $\epsilon = (4E/\hbar\omega_c) - 2m$ . Для этой цилиндрически симметричной калибровки радиальную волновую функцию можно выразить через присоединенные полиномы Лежандра

$$u_{nm}(x) = x^{|m|} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] L_n^{|m|}(x^2). \quad (15.42)$$

Здесь  $L_0^{|m|}(x^2)$  не зависит от  $x$  и  $L_1^{|m|}(x^2) \propto (|m| + 1 - x^2)$ . Энергетические уровни, конечно, не зависят от выбора калибровки. Из уравнения (15.40) видно, что спектр одночастичных энергетических уровней состоит из многократно вырожденных уровней Ландау с энергией

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega_c, \frac{3}{2}\hbar\omega_c, \dots \quad (15.43)$$

Для наинизшего уровня  $n = 0$  и  $m = 0, 1, -1, -2, \dots$  волновая функция равна

$$\Psi_{0m} = z^{|m|} \exp\left[-\frac{|z|^2}{4l_H^2}\right], \quad (15.44)$$

где  $z = r \exp(-i\phi)$  и  $l_H^2 = \hbar c / eH$ .

Для образца ограниченной площади  $A = \pi R^2$  число одночастичных состояний на уровне Ландау  $n_H = HA/\phi_0$ . Коэффициент заполнения, по определению, равен  $\nu = n/n_H$ , так что  $1/\nu$  равно числу квантов магнитного потока приходящихся на один электрон.

До сих пор предполагалось, что электрическое поле ничтожно мало. Чтобы учесть поле  $E$  надо добавить в Гамильтониан электрическое поле

$$\mathcal{H} = \sum_j^N \left( \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_j) \right]^2 + Eey_j \right) \quad (15.45)$$

Собственные значения энергии этого Гамильтониана равны

$$E_{k,n} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \hbar ck \left( \frac{E}{H} \right) - \frac{mc^2}{2} \left( \frac{E}{H} \right)^2 \quad (15.46)$$

Второй член здесь есть  $\hbar kv_{drift}$ , где  $v_{drift} = c(E/H)$ - классическая дрейфовая скорость. В слабом электрическом поле  $E/H \rightarrow 0$  мы приходим к знакомому спектру со щелями  $\hbar\omega_c$  как и должно быть. При увеличении электрического поля уровни наклоняются в электрическом поле.

#### 15.1.4 Коммутационные соотношения и кратность вырождения уровней

В квантовой механике компоненты вектора координат  $\mathbf{r}$  и вектора импульса  $\mathbf{p}$  заменяются операторами, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[\hat{p}_\mu, \hat{r}_\nu] = -i\hbar\delta_{\mu\nu} \quad (15.47)$$

Вследствие этого координаты центра циклотронного движения  $(X, Y)$  имеют неопределенность порядка  $l_H$ :

$$[X, Y] = \left[-\frac{cp_y}{eH}, Y\right] = -\frac{c}{eH}[p_y, Y] = i\frac{c\hbar}{eH} = il_H^2 \quad (15.48)$$

То же самое и для приращений  $(\zeta, \eta)$

$$[\zeta, \eta] = -il_H^2. \quad (15.49)$$

При включении магнитного поля непрерывный спектр системы преобразуется в дискретные уровни Ландау, и на каждом уровне оказывается большое число электронных состояний. Это вырождение связано с тем, что разные состояния с разным положением центра циклотронного вращения имеют одну и ту же энергию. Нетрудно вычислить кратость этого вырождения. Пусть система имеет размер  $L \times L$ . Как обычно, из граничных условий импульс в калибровке Ландау  $p_y = (-eH/c)X$  приобретает дискретные значения с шагом  $2\pi\hbar/L$ . Т.о., в выбранной калибровке координата центра орбиты  $X$  также имеет дискретные значения

$$\begin{aligned} X &= \Delta X, 2\Delta X, \dots, \quad 0 \leq X \leq L, \\ \Delta X &= 2\pi \frac{c\hbar}{eH} \frac{1}{L} \equiv 2\pi l_H^2 / L \end{aligned} \quad (15.50)$$

Наконец, получаем полное число состояний на каждом уровне Ландау (кратность вырождения уровня)

$$N_L = \frac{L}{\Delta X} = \frac{L^2}{2\pi l_H^2} \quad \text{или на единицу площади} \quad \frac{1}{2\pi l_H^2} \quad (15.51)$$

Этот результат имеет конечно прозрачный физический смысл площади двумерной системы, деленной на площадь циклотронной орбиты. Ясно, что геометрическая картина волновых

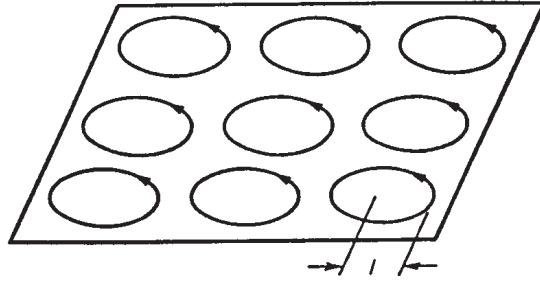


Рис. 15.2: Схематическое изображение электронных состояний на плоскости двумерной системы. Кратность вырождения уровня Ландау примерно равна числу циклотронных орбит, помещающихся на плоскости  $X, Y$ .

функций зависит от выбора калибровки, но кратность вырождения – не зависит. Иллюстрация этой картины для симметричной калибровки дана на Рис. 15.2. Благодаря соотношению 15.51, в магнитном поле возникает естественная безразмерная мера концентрации

$$\nu \equiv n/N_L = 2\pi l_H^2 n, \quad (15.52)$$

называемая коэффициентом заполнения уровней Ландау. Например,  $\nu = 4$  означает, что 4 уровня Ландау ( $N = 0, 1, 2, 3$ ) заполнены полностью.

На рис. 15.3 показана плотность состояний для 2D и 3D систем. Замечательное свойство 2D систем – полностью дискретный спектр. Для 3D случая электрон может свободно двигаться вдоль направления поля.



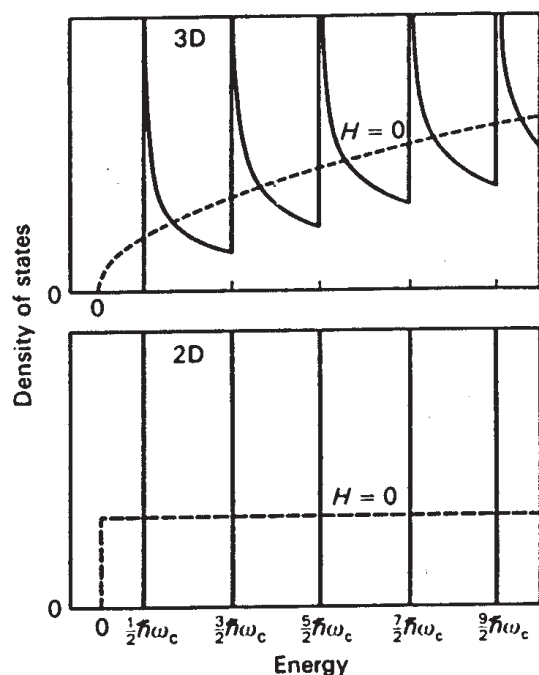


Рис. 15.3: Плотность состояний для идеальной 2D системы (нижняя панель) и 3D системы (верхняя панель) в магнитном поле

### 15.1.5 Уровни Ландау в неупорядоченной системе

Присутствие случайного потенциала - это естественное свойство реальных систем. Это например, шероховатость интерфейса. Тогда Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V_{\text{random}}(r), \quad (15.53)$$

где  $V_{\text{random}}(r)$  - случайный потенциал. Конкретная форма случайного потенциала может быть различной. Если случайный потенциал мал (по сравнению с расстоянием между уровнями), то он лишь снимает вырождение состояний на уровне Ландау. Роль случайного беспорядка в режиме КЭХ рассмотр-

рена ниже.

### 15.1.6 Экспериментальное наблюдение квантового эффекта Холла

В 1980г. Клаус фон Клитцинг будучи аспирантом Ландвера проводил измерения в лаборатории сильных магнитных полей в Гренобле. Измеряя  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{xy}$  на кремниевой МДП структуре в зависимости от  $V_g$  он получил результат показанный на рис. 15.4.

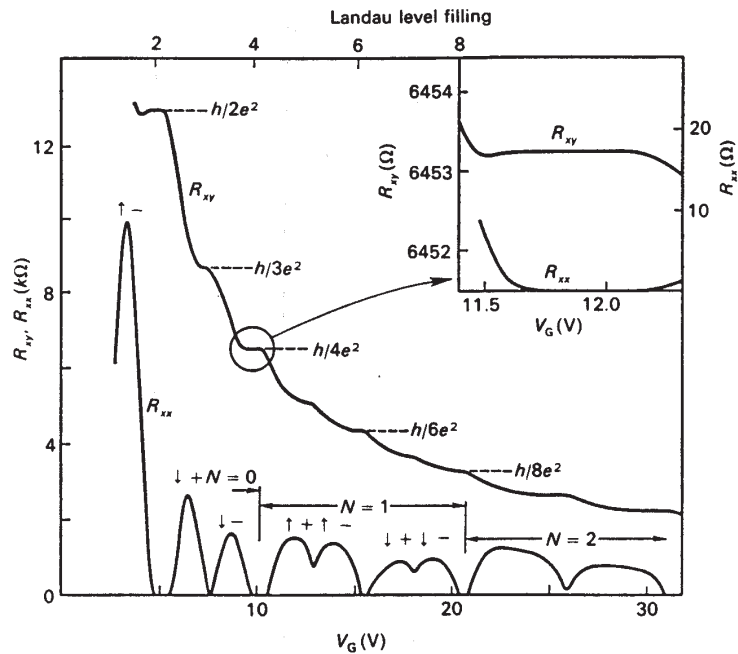


Рис. 15.4: Экспериментальный результат [К. von Klitzing (1982)]– КЭХ в инверсионном слое Si-МДП структуры в магнитном поле 19Т и при температуре 1,5К.

Видно, что  $\rho_{xx}$  практически исчезает в некотором диапа-

зоне  $V_g$ , а холловское сопротивление в этих же диапазонах имеет вид плато с квантованным значением сопротивления. Заслуга фон Клитцинга в том, что он заметил в этом эффекте фундаментальность и сумел ее продемонстрировать в публикации, вышедшей несмотря на критическую отрицательную рецензию.

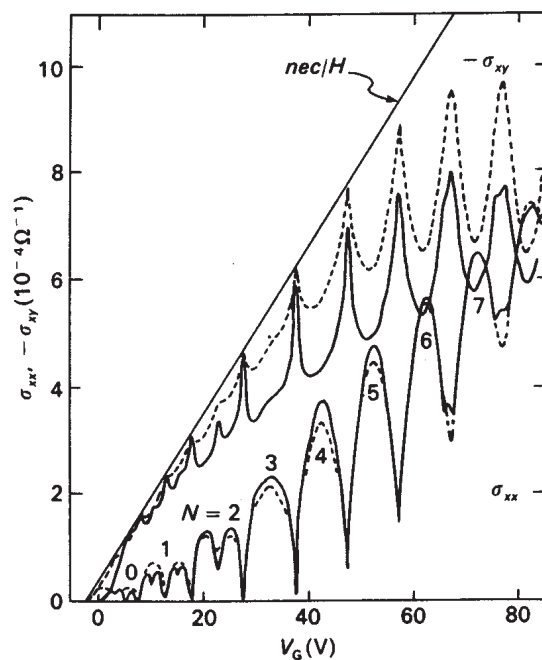


Рис. 15.5: Экспериментальный результат [S.Kawaji (1982)]– компоненты  $\rho_{xx}$  и  $\rho_{xy}$  в режиме КЭХ в инверсионном слое Si-МДП структуры в магнитном поле 8.6Т и при температуре 1.5К.

Поучительно напомнить историю о том, что аналогичные измерения (в сильных полях, при такой же низкой температуре и на аналогичных, если не еще лучших образцах) проводили и до Клитцинга, в частности, Shinji Kawaji с сотрудниками,

которые также видели на исходных данных как плато  $\rho_{xy}$ , так и падение  $\rho_{xx}$ . Однако, под влиянием доминировавшей тогда теории Т. Ando, Kawaji пересчитывал свои результаты по измерению компонент тензора сопротивления в  $\sigma_{xy}$  и изучал отклонение пиков  $\sigma_{xy}$  при больших номерах от предсказаний теории, согласно которой отклонения описывались теорией пертурбативно по  $1/\omega\tau$ . Конечно, КЭХ не может быть описан в рамках теории возмущений. Типичные результаты S. Kawaji и сопоставление их с теорией показаны на Рис. 15.5. Этот поучительный исторический результат показывает, как важно экспериментатору быть свободным от навязываемых “общепринятой” точкой зрения (по английски это звучит гораздо лучше - “common wisdom”) идей и интерпретаций и руководствоваться только правилом “лезвия Окхама”.

### 15.1.7 Квантовый транспорт в системе с беспорядком

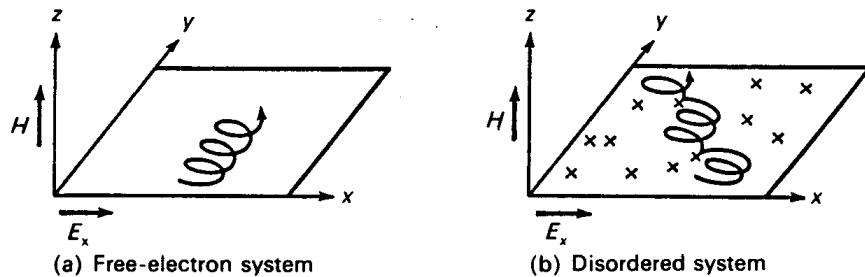


Рис. 15.6: Классическое движение электрона в 2D системе: (a) в идеальном случае, (b) в системе с рассеивателями.

### 15.1.8 Роль случайного потенциала в режиме КЭХ. Локализация на уровнях Ландау

Первоначально, задача для  $\delta$ -образного потенциала случайного потенциала:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - V_0 l^2 \sum_j^N \delta^2(\mathbf{r}_j) \quad (15.54)$$

была точно решена Prange [3]. Оказалось, что  $\delta$ -образный примесный потенциал образует одно связанное состояние, которое отщепляется вниз по энергии от каждого уровня Ландау и это состояние не несет ток. Однако остальные состояния восполняют недостаток тока, т.е. точно компенсируя его уменьшение из-за локализованного состояния. Именно поэтому точечная примесь не оказывает влияния на холловскую проводимость.

Этот же результат имеет место и для других видов случайного потенциала, а не только точечного. Легче всего это понять на примере плавного потенциала, в котором изменения энергии происходят на масштабах длин гораздо больше магнитной длины. В таком потенциале можно локально решить задачу с почти идеальным потенциалом и затем плавно в пространстве соединить локальные уровни в случайный рельеф потенциала. Схематическое изображение эквипотенциальных орбит в случайном плавном потенциале показано на рисунке 15.7. Именно вследствие того, что коммутатор  $X$  и  $Y$  исчезает как  $1/B$  при  $B \rightarrow \infty$  (т.е. орбита стягивается в точку), величины  $X$  и  $Y$  можно трактовать как классические переменные и наше квазиклассическое рассмотрение выше вполне имеет смысл. Повторим еще раз соответствующие уравнения

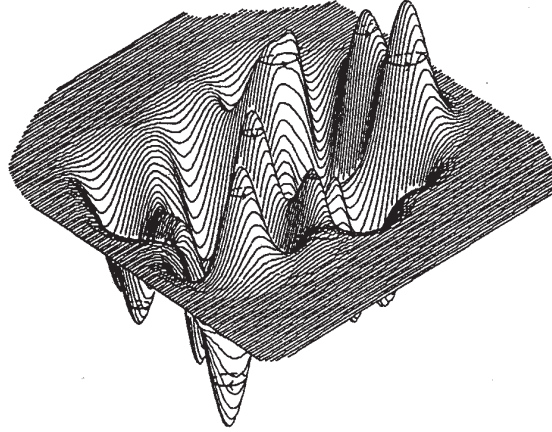


Рис. 15.7: Эквипотенциальные орбиты вблизи потолка и дна плавного случайного потенциала. Стрелками показано направление движения в магнитном поле.

движения:

$$\dot{X} = \frac{l_B^2}{\hbar} \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = -\frac{l_B^2}{\hbar} \frac{\partial V}{\partial X}$$

Очевидно, что  $dV/dt = 0$  и электрон движется вдоль эквипотенциальных орбит  $V(X, Y) = Const$  как показано на Рис. 15.7. Обычно случайный потенциал симметрично распределен относительно  $V = 0$  (электрон-дырочная симметрия). Если беспорядок не слишком велик, то вариации  $V_{max} - V_{min} \ll \hbar\omega_c$ . Тогда для бесконечного образца все эквипотенциальные орбиты с  $V \neq 0$  являются замкнутыми; они соответствуют “вершинам” и “впадинам” потенциального рельефа (см. Рис. 15.7). Открытые эквипотенциальные орбиты отвечают значению  $V = 0$ , т.е. энергии точно равной  $E = \varepsilon_n$ ; они соответствуют траекториям перколяции, огибающим по траверсе вер-

шины и впадины рельефа. Закрытые эквипотенциальные орбиты не дают вклада в перенос заряда. Т.о. при  $T = 0$  до тех пор пока  $\varepsilon_F$  изменяется в диапазоне энергий, отвечающих закрытым эквипотенциальным орбитам (локализованные состояния), холловский ток должен оставаться постоянным и это в эксперименте отражается в существовании протяженных плато. При  $\varepsilon_F = \varepsilon_n$ , холловская проводимость изменяется скачком. Это простейшее “объяснение” квантового эффекта Холла иллюстрирует рисунок 15.8.

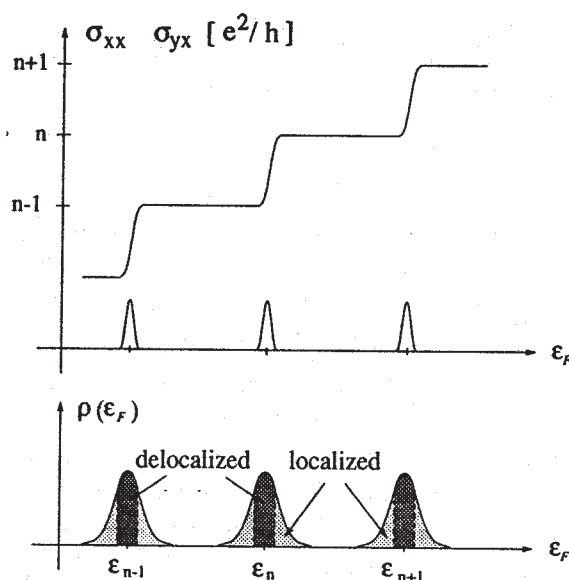


Рис. 15.8: Качественная картина уширения уровней Ландау, локализованных и делокализованных состояний на крыльях уровней и их связи с квантованием холловской проводимости. Ширина полосы протяженных состояний на нижней панели стремится к 0 для образца бесконечных размеров.

Статистически усредненное распределение плотности состо-

яний приведет к уширенным уровням Ландау, изображенным на рисунке 15.1. Из квазиклассических перколяционных соображений нетрудно понять что состояния на крыльях уширенных уровней локализованы, а делокализованные состояния занимают дорожки вдоль эквипотенциальных траекторий протекания в случайном плавном потенциале.

Если уровень Ферми лежит в области локализованных состояний, то изменением напряжения на затворе можно перемещать уровень Ферми вверх и вниз, что никак не отражается на холловской проводимости, поскольку при этом не изменяется ток, переносимый по траекториям перколяции. Таким образом получают протяженные плато холловской проводимости. Фактически, протяженность плато есть мера количества локализованных состояний и чем чище образец, тем уже будут плато.

**Диагональные компоненты тензоров проводимости и сопротивления.** Интересно также обудить, что происходит с диагональной компонентой провоимости  $\sigma_{xx}$ . Пока уровень Ферми находится в области локализованных состояний, электроны на уровне Ферми не могут изменять свое состояние, т.к. все места вблизи  $E_F$  в энергетическом спектре заполнены. Следовательно, не могут иметь место ни упругие, ни неупругие переходы. Первое означает, что 2D система является изолятором,  $\sigma_{xx} = 0$ , так как упругое рассеяние нужно для существования проводимости в магнитном поле (это аналогично химической нейтральности у заполненных оболочек благородных элементов). Второе же означает, что 2D система является идеальным проводником,  $\rho_{xx} = 0$ . Таким образом, 2D система в режиме КЭХ одновременно является и изолятором и идеальным проводником. Когда же уровень Ферми



совпадает с траекторией перколяции (т.е. протяженным состоянием), то упругие и неупругие процессы становятся возможными, поскольку на уровне Ферми имеются пустые состояния. Вследствие этого, при переходе от одного плато к другому 2D система демонстрирует пики как  $\sigma_{xx}$ , так и  $\rho_{xx}$  и в этом узком интервале энергий подобна обычному металлу в нулевом поле.

**Интересен вопрос - а где по энергии располагаются протяженные состояния ?**

Интуитивно ясно, что они должны быть в середине уширенного уровня Ландау. Это действительно так для симметричного случайного потенциала и при отсутствии взаимодействия электронов находящихся на разных уровнях Ландау. Взаимодействие же (отталкивание) уширенных уровней приведет к более сложному ответу, в котором протяженные состояния могут оторваться от своих родительских уширенных уровней и независимо от них уходить вверх по энергии. Конечно, для такого необычного случая потенциальная энергия взаимодействия (т.е. обменная энергия) должна быть больше циклотронной энергии, что действительно получается в случае сильного перекрытия уровней Ландау.

### 15.1.9 Формула Кубо

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= e^2 \langle\langle \dot{X} \dot{Y} \rangle\rangle, & \sigma_{xy} &= -\frac{ne\hbar}{H} + \Delta\sigma_{xy} \\ \Delta\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{h} \left( \langle\langle \dot{Y} \dot{X} \rangle\rangle - \langle\langle \dot{X} \dot{Y} \rangle\rangle \right),\end{aligned}\quad (15.55)$$

где  $X$  и  $Y$  - центры циклотронных орбит и угловые скобки - корреляционная функция.

Главный результат: как диагональная компонента  $\sigma_{xx}$ , так и отклонение Холловской проводимости  $\Delta\sigma_{xy}$  от канонического

значения  $-nec/H$  определяются динамикой скорости  $(\dot{X}, \dot{Y})$  центра циклотронного движения. Можно доказать несколько теорем (интуитивно понятных)

(1) Диагональная компонента проводимости определяется только состояниями вблизи уровня Ферми  $E_F$ . В противоположность этому, в холловскую компоненту проводимости входят все состояния под уровнем Ферми и на нем. Последнее отражает тот факт, что холловская проводимость - это бездиссипативный процесс.

(2) Вклад локализованных состояний в Холловскую проводимость равен нулю.

Отсюда следует вывод: В том диапазоне энергий, которые соответствуют локализованным состояниям,  $\sigma_{xy}$  остается точно неизменной константой (при  $T = 0$ ). Ясно, что это объясняет механизм образования плато в  $\sigma_{xy}$ .

### 15.1.10 Магнитный поток и КЭХ. Связь Холловской проводимости с энергией [Imry (1982), Aoki (1982)]

Проведем мысленный эксперимент, описанный Лафлиным в 1983г.; его схема изображена на рис.15.10. Создадим внешние условия (поле, температура, плотность электронов) так чтобы система находилась в режиме КЭХ. Изменим магнитный поток  $\Phi$  на  $\delta\Phi$

$$I = c \frac{\partial E_T}{\partial \Phi}, \quad (15.56)$$

$$\delta\Phi I = c\delta E_T. \quad (15.57)$$

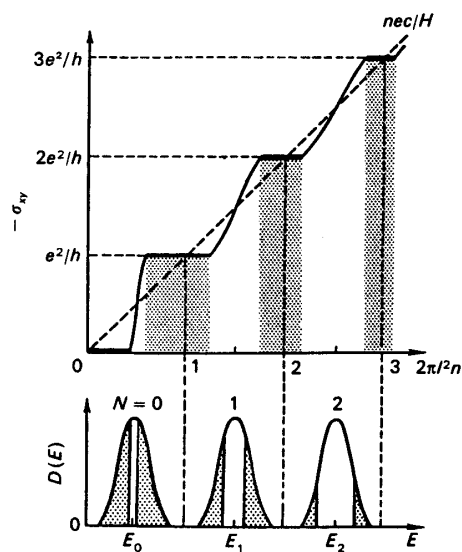


Рис. 15.9: Соотношение между структурой уровней Ландау и Холловской проводимостью. Заштрихованы области локализованных состояний.

где  $E_T$  - полная энергия системы. В режиме КЭХ диагональная компонента сопротивления  $\rho_{xx} = 0$ , диссипации нет, поэтому единственная причина изменения энергии - это перенос заряда в Холловском поле с одного берега на другой:  $\delta E_T = \delta(qV_H)$ . (Обратите внимание на роль границы !) Поскольку в режиме КЭХ  $V_H = const$ , то  $\delta E_T = \delta qV_H$ , т.е. энергия изменяется за счет переноса заряда с одного берега на другой в постоянном поле.

**Q:** Пусть изменение потока  $\delta\Phi = \Phi_0 = hc/e$ . Какой заряд переносится с одного берега на другой ?

**A:**

$$\delta q = \frac{\delta E_T}{V_H} = \frac{\Phi_0 I}{c V_H} = \frac{h}{e} \frac{I}{V_H} = \left(\frac{h}{e}\right) \left(\frac{e^2}{h}\right) = e \quad (15.58)$$

1) Т.о., изменение потока на 1 квант, вызывает перенос ровно 1 электрона с одного берега на другой

2) Как видно, в формуле для холловского сопротивления  $h/e^2 = (h/e)(1/e)$ , одна степень  $e$  возникает из-за кванта потока, другая из-за заряда электрона.

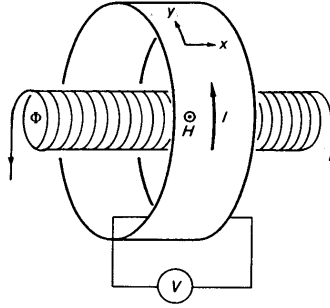


Рис. 15.10: Геометрия мысленного эксперимента Лафлина (1981).

### 15.1.11 Радиус локализации и Холловская проводимость

Существование локализации состояний на уширенных уровнях Ландау хорошо видно в численных симуляциях. Для этого конструируется случайная система конечного размера в 2D пространстве. Случайный потенциал можно выбрать в виде набора короткопериодных рассеивателей:

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (15.59)$$

где  $\mathbf{r}_i$  - положение  $i$ -того рассеивающего центра. Рассеиватели распределяются в 2D пространстве случайно. Магнитное поле выберем сильным так, чтобы рассматривать только наинизший  $N = 0$  уровень Ландау. Волновые функции Ландау на нем мы уже обсуждали:

$$\psi(\mathbf{r}) = L^{-1/2} \exp\left(-i\frac{X_y}{l^2}\right) \chi_N(x - X). \quad (15.60)$$

Они представляет собой произведение плоской волны распространяющейся в направлении  $y$  с волновым вектором  $k_y$  и собственных функций одномерного гармонического осциллятора по оси  $x$  с центром орбиты в точке  $X$ . В отсутствие беспорядка все состояния на уровне Ландау вырождены. Любая линейная комбинация этих состояний также является собственным состоянием. Локализации нет, точнее ее просто нельзя определить. В присутствии беспорядка потенциал в разных точках  $X$  различен и вырождение снимается.

На рисунке 15.11 изображена плотность состояний на уровне Ландау и радиус локализации. Плотность состояний определяется характером беспорядка и, как правило, имеет Гауссову форму. Состояния вблизи нижнего и верхнего краев уровня экспоненциально сильно локализованы в пространстве. Радиус локализации резко растет когда собственное значение энергии приближается к центру уровня Ландау. Позиции центра локализованных состояний различаются в пространстве, так что вероятности переходов между этими состояниями экспоненциально малы.

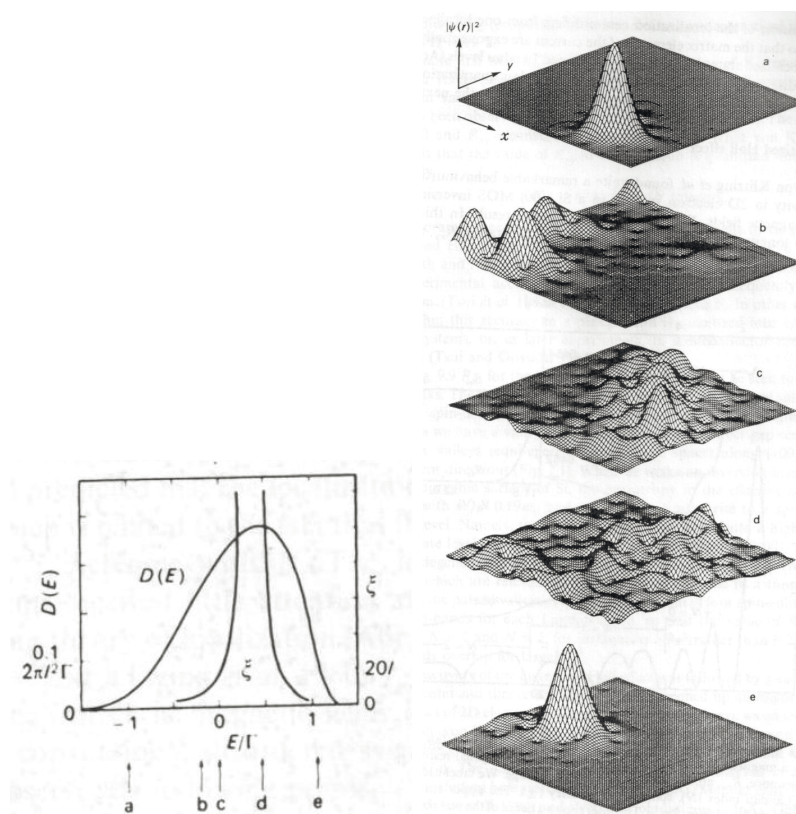


Рис. 15.11: Левая панель - плотность состояний и радиус локализации на уровне Ландау. Правые панели - пространственное распределение волновых функций  $|\Psi|^2$  на уровне Ландау для различного заполнения уровня

### 15.1.12 Распределение потенциала в режиме КЭХ

Любопытно и поучительно рассмотреть вопрос о распределении эквипотенциалей в режиме КЭХ в образцах двух принципиально различных геометрий.

#### Прямоугольная геометрия.

Рассмотрим вначале прямоугольный образец - т.н. холловский мостик (Рис. 15.12), помещенный в магнитное поле перпендикулярное его плоскости. Обозначим направление вдоль образ-

ца  $X$ , поперек образца  $-Y$ . Пропустим через образец ток, от контакта стока  $S$  до истока  $D$ . Предположим, что ток  $J$  пренебрежимо мал, так что  $V_{xy} = JR_{xy} \ll V_g$  (для МДП структуры). В режиме КЭХ  $\rho_{xx}$  и  $\sigma_{xx}$  исчезающе малы. Для прямоугольного образца это проявляется в том, что разность потенциалов, измеренная между контактами на каждой стороне образца (1 – 2, 2 – 3, 4 – 5, 5 – 6) равна нулю и значит эквипотенциальные линии параллельны оси  $X$ .

Между любой парой холловских контактов развивается полное напряжение  $V_{xy} = J(h/Ne^2)$ ; действительно, проходя по оси  $Y$  об одного края образца до другого, например, от контакта 2 до контакта 5, мы пересекаем все эквипотенциальные линии. Контакты  $S$  и  $D$  сделаны из сильно легированного полупроводника, т.е. материала с металлической проводимостью. Концентрация электронов в материале контакта  $n_{cont}$  велика, Холловское сопротивление контакта ( $\propto 1/n_{cont}$ ) пренебрежимо мало, поэтому Холловское напряжение, развиваемое в контакте поперек направления тока, пренебрежимо мало. Следовательно, край контакта обращенный к 2D слою является эквипотенциальной линией. Это означает, что эквипотенциали в 2D слое вблизи контактов должны идти параллельно краю контакта, а значит они резко изгибаются и стягиваются в точку в одном из углов, как показано на рисунке 15.12.

Проходя от  $S$  до  $D$  вдоль какой-либо линии при фиксированном  $Y$  мы пересечем все эквипотенциали, следовательно, между контактами  $S$  и  $D$  развивается напряжение, примерно равное Холловскому напряжению. Точнее говоря, оно равно  $V_{xy} + \delta V_S + \delta V_D$ , где  $\delta V_{S,D}$  - падения напряжения на самих контактах, которые, конечно, не являются идеальным металлом.

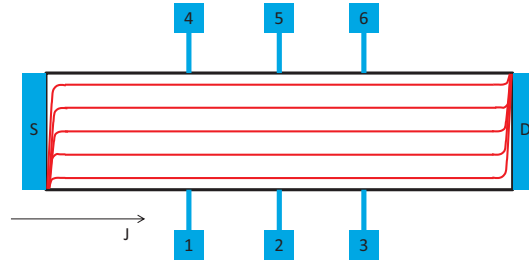


Рис. 15.12: Схематическое изображение эквипотенциалей в прямоугольном образце в режиме КЭХ.  $S, D$  - токовые контакты, 1-6 - потенциальные контакты.

### Диск Корбино

Другой интересный и важный пример геометрии - тороидальный образец, т.н. “диск Корбино”, показан на рис. 15.13. Магнитное поле приложено перпендикулярно 2D плоскости. Контакты  $S, D$  являются внутренней и внешней областью этого “бублика”. При приложении напряжения между контактами  $S$  и  $D$  возникает радиальная напряженность электрического поля, но ток между  $S$  и  $D$  не течет, поскольку  $\sigma_{xx} = 0$ ; следовательно, образец является изолятором. Эквипотенциалы имеют вид концентрических колец вдоль которых течет бездиссипативный ток. Поскольку направление тока и приложенного электрического поля ортогональны, то это ток является Хоолвским током и для него образец является идеальным металлом.

#### 15.1.13 Многочастичная волновая функция электронов в режиме целочисленного КЭХ

В режиме КЭХ, когда  $\nu$  целое, между заполненными и пустыми состояниями имеется энергетическая щель  $\hbar\omega_c$ . Наличие



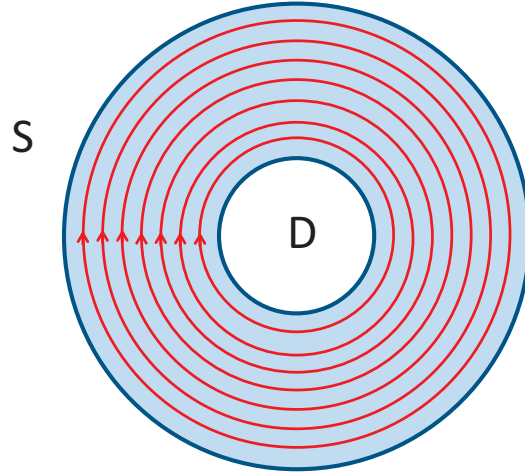


Рис. 15.13: Схематическое изображение эквипотенциалей в тороидальном образце в режиме КЭХ.  $S, D$  - токовые контакты.

щели делает электронную жидкость несжимаемой, поскольку бесконечно малое уменьшение площади занимаемой системой  $\delta S$  потребует перехода электронов на вышележащий уровень Ландау, через отличную от нуля энергетическую щель.

Многочастичная волновая функция при факторе заполнения  $\nu = 1$  может быть сконструирована из антисимметричного произведения функций, которые помещают один электрон в каждое из  $N$  состояний  $0 \leq |m| \leq n_H - 1$ . Очевидно, число таких состояний равно  $n_H$ .

$$\Psi_1(1, 2, \dots, N) = \prod_{\langle i, j \rangle} (z_i - z_j) \exp \left[ - \sum_l \frac{|z_l|^2}{4l_H^2} \right] \quad (15.61)$$

Здесь  $l_H^2 = \hbar c / eB$  - квадрат магнитной длины, произведение взято по всем парам  $\langle i, j \rangle$ , и  $z_j = x_j + iy_j$  - координата  $j$ -того электрона на комплексной плоскости. Эта волновая функция,

однако, отнюдь не отвечает коллективизированному состоянию системы. Она лишь описывает сохранение в сильном магнитном поле антисимметрии волновых функций к перестановкам квазичастиц и сохранение статистики Ферми.

#### 15.1.14 Обзор концепций описания IQHE

- Локализация: протягивание теории локализации, хорошо разработанной для нулевого и слабого поля, в область сильных полей
- Энергетическая щель в спектре подвижных состояний - P. Středa. Эта концепция объяснила выполнение квантования  $\rho_{xy}$  с точностью  $\exp[(+\hbar\omega_c/\Gamma)^2]$
- Калибровочные аргументы (R. Laughlin)
- Топологические аргументы.
- Теория рассеяния в присутствии сильного магнитного поля
- Теоретико-полевой подход. Двухпараметрическая скейлинговая теория. Инстантоны. Суперсимметрия. Ренормализационная группа

# Литература

- [1] M. Janssen, et al. Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect, Ed. J. Haidu, (VSH, Köln 1994).
- [2] С. Гирвин, Квантовый эффект Холла, Москва, Ижевск. 2003.
- [3] R. E. Prange, Phys. Rev. B **23**, 4802 (1981).
- [4] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).