

# Лекция 14. Диффузионный транспорт в мезоскопических системах

Определение:

$$\lambda_F, l_j, l \ll L$$

Диффузионный классический

$$\lambda_F, l \ll L, l_j,$$

Диффузионный квантовый

## 14.0.1 Классический диффузионный транспорт

Электроны движутся изотропно со средней скоростью  $\langle \mathbf{v} \rangle$ .

$\langle \mathbf{v} \rangle = 0$  при  $\mathbf{E} = 0$

Если  $\mathbf{E} \neq 0$ , то на электроны действует сила  $e\mathbf{E}$ , то

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = -e\bar{E}t/m$$

$$\bar{v}_d \equiv \langle \mathbf{v}(\tau) \rangle = -\frac{e}{m}\tau\bar{E} \equiv -\mu\bar{E},$$

$$\sigma = \frac{\bar{j}}{\bar{E}} = \frac{-en_e\langle \bar{v} \rangle}{\bar{E}} = \frac{n_e e^2 \tau}{m} = ne\mu$$

Мы получили формулу Друде – чисто классическую; в ней нет ничего квантового

## 14.02. Квазиклассика

Рассмотрим, для определенности 2D систему.

Из периодичности решетки

$$n_e^{2d} = \frac{g_s}{(2\pi)^2} \pi k_F^2 = \frac{g_s}{4\pi} k_F^2$$
$$l = v_F \tau = \frac{\hbar k_F}{m} \tau.$$

Подставим все это  
в ф-лу Друде:

$$\sigma_{2d} = \frac{e^2}{2\pi m} k_F^2 \tau = \frac{e^2 v_F \tau}{h} k_F = \frac{e^2}{h} k_F l = \frac{2e^2}{h} \frac{\pi l}{\lambda_F} \sim \frac{2e^2}{h} \frac{l}{d_{ee}}$$

В вырожденной системе только состояния с энергией  $|E - E_F| < kT$  могут рассеиваться (запрет Паули). Для их учета вспомним плотность состояний в 2D

$$\nu_{2d} \equiv \frac{dn}{dE} = \frac{g_s m}{2\pi \hbar^2}$$

и перепишем выражение Друде для проводимости

$$\sigma_{2d} = \frac{g_s e^2 k_F l}{h \cdot 2} = e^2 \frac{g_s}{2\pi \hbar} \frac{m \hbar k_F}{\hbar 2m} l = e^2 \left( \frac{g_s m}{2\pi \hbar^2} \right) \left( \frac{v_F l}{2} \right)$$

$$\sigma_{2d} = \frac{g_s e^2 k_F l}{h} = e^2 \frac{g_s}{2\pi\hbar} \frac{m\hbar k_F}{\hbar 2m} l = e^2 \left( \frac{g_s m}{2\pi\hbar^2} \right) \left( \frac{v_F l}{2} \right)$$

Коэффициент диффузии в 2D системе:  $D_{2d} = v_F l / 2$

$$\sigma_{2d} = e^2 \nu_{2d} D_{2d}$$

Но это просто соотношение Эйнштейна для проводимости.  
Ясно видна роль плотности состояний на уровне Ферми.

## Поговорим немного о коэффициенте диффузии

Коэффициент диффузии зависит от размерности системы  $d$

$$D_d = \frac{1}{d} v_F l = \frac{1}{d} v_F^2 \tau$$

В статфизике, коэффициент диффузии описывает как изменяется скорость индивидуального электрона до и после рассеяния. Более точно это дается коррелятором скорости (формула Кубо):

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt$$

Здесь  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по всем возможным направлениям в пространстве скоростей (или импульсов), которые может иметь начальная скорость  $v(0)$ , а индекс  $x$  означает направление приложенного электрического поля  $E_x$ .

В качестве упражнения вычислим коэффициент диффузии для одномерной системы  $d = 1$ . Предположим Друдевский механизм рассеяния, т.е. полную потерю памяти после каждого акта рассеяния. Тогда

$$D_{d=1} = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt = \int_0^{\tau} + \int_{\tau}^{\infty}$$

В первом интеграле для коротких времен  $t < \tau$  скорости  $v(t)$  и  $v(0)$  скоррелированы, т.е. произведение  $v_x(t)v_x(0) \approx (v(0))^2$ .

Для второго интеграла произведение будет случайным и обратится в ноль после усреднения. Для 1D-пространства есть только два направления скорости  $+x$  и  $-x$ , поэтому  $(v_x(0))^2 = v_F^2$  и из формулы Кубо получаем подтверждение нашего пальцевого результата

$$D_{d=1} = v_F^2 \tau$$

### Вспомним законы Фика для диффузии

1й закон:

$$J = -D \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$J$  - диффузионный поток (количество массы переносимой в единицу времени через единицу площади),  $\phi$  - концентрация (напр, количество вещества в единице объема)  
 $x$  - положение в пространстве.

При  $d = 2, 3$  надо записать  $J = -D\nabla\phi$

Градиент концентрации – движущая сила для диффузии.

Запишем баланс массы: согласно ему а также согласно здравому смыслу изменение концентрации в данной точке должно быть равно разности потока втекающих и вытекающих частиц. Применим также 1й закон Фика и получим

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}J = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

Физиолог Adolf Fick установил эти законы экспериментально, в 1855г. измеряя диффузию в водных растворах соли):

Предположим, что  $D$  постоянен и не зависит от координаты, тогда получаем

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$$

2й закон Фика для случая  $d = 2, 3$  :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\nabla^2\phi$$

Запишем 2й закон Фика в наших обозначениях для 2D системы электронов:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\vec{r}, t).$$

Решение этого уравнения в цилиндрических координатах:

$$n_{2d}(\vec{r}, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right).$$

**Зад.: проверить !**

Отсюда можно вычислить среднее расстояние, на которое ансамбль частиц уйдет за время  $t$  от начала координат:

$$l(t) \equiv \langle |\vec{r}(t)| \rangle \equiv \frac{\int |\vec{r}| n(\vec{r}, t) d\vec{r}}{\int n(\vec{r}, t) d\vec{r}} = \boxed{\sqrt{Dt}}$$

**Зад.: вывести !**

Ранее мы уже пользовались этим результатом, но теперь вывели его. Он означает, что в диффузионном режиме среднее смещение растет как корень из времени.

Отсюда автоматически следует, например, что длина сбоя фазы и время сбоя фазы в диффузионном режиме связаны соотношением

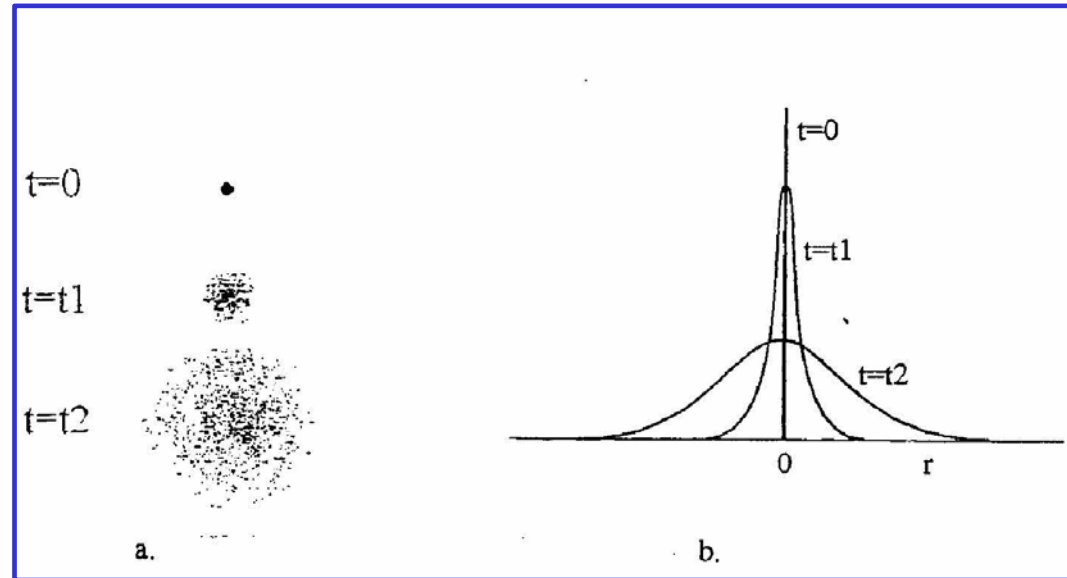
$$l_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$$

То же самое соотношение связывает неупругую длину  $l_l$  с неупругим временем  $\tau_l$ .

Диффузионное движение классической частицы в пространстве в зависимости от времени.

(a) расширение области в реальном пространстве показывает как плотно упакованное распределение частиц в момент  $t = 0$  в точке  $r = 0$  расширяется со временем.

(b) Гауссова форма плотности вероятности  $n(r, t)$  обнаружить частицу в точке  $r$  во время  $t$ .



## NB

Вы не заметили, что мы как-то мимоходом, не обсуждая того, перешли от числа электронов (т.е. объема Ферми сферы) к плотности состояний на поверхности Ферми. Это соотношение есть теорема Латинжера. Для невзаимодействующей системы она тривиально получается из принципа Паули, но важно что она остается справедливой даже в случае взаимодействующей системы.



## 14.1 Квантовый диффузионный транспорт. Слабая локализация

Рассмотрим случай  $\lambda_F, l_e \ll L, l_\phi$

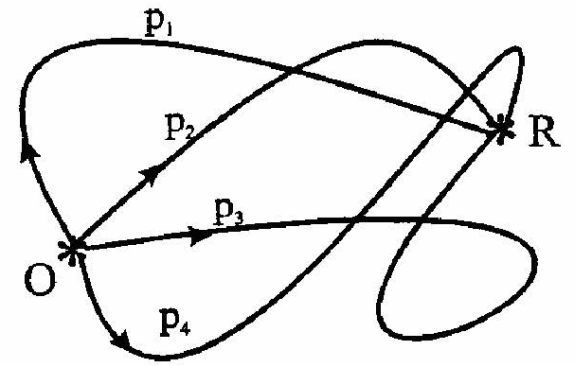
### 14.1.1 Упругое и неупругое рассеяние

До сих пор мы предполагали, что каждый акт рассеяния полностью стирает информацию о предыдущей величине и направлении скорости электрона. Это означает, что мы пренебрегли корреляцией фазы волновой функции. Если фаза хотя бы частично сохраняется при рассеянии, то это повлияет на проводимость связанную нами посредством Эйнштейновского соотношения с коэффициентом диффузии.

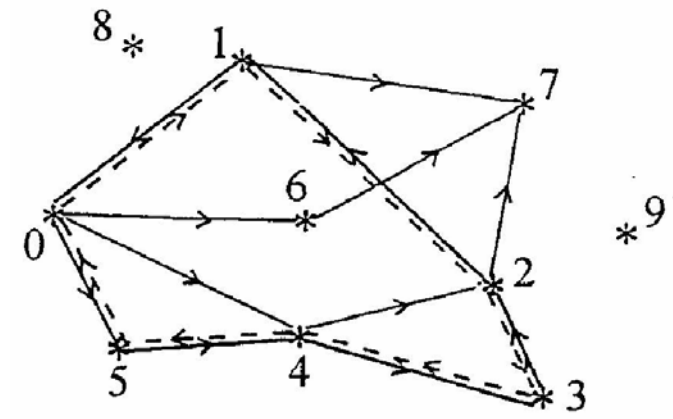
Действительно, сохранение фазы в процессе рассеяния вносит корреляцию между скоростями на временах, больших чем время упругого рассеяния  $\tau_e$ .

Обозначим  $\tau_\phi$  - время фазовой когерентности, т.е. время на котором спадает корреляция

Электронные волны, распространяются в неупорядоченной среде с упругими рассеивателями. Волновая функция одного электрона из точки  $O$  разлагается в ряд частных волн  $\psi_j$ , каждая из которых следует по вполне определенному пути  $p_j$  и приходит в конечную точку  $R$  с коэффициентом прохождения  $t_j$ .



Электронная волна исходит из точки  $O$ . Выделим два класса траекторий. В первом классе конечная точка выбрана случайно, например, 7. Амплитуда волны в точке 7 сложится из волн прошедших по путям  $0-1 \rightarrow 7$ ,  $0-4-2 \rightarrow 7$ ,  $0-5-4-3-2 \rightarrow 7$  и т.д.



$$\Psi(7) = \sum_j \psi_j = \sum_j t_j \exp(i\varphi_j)$$

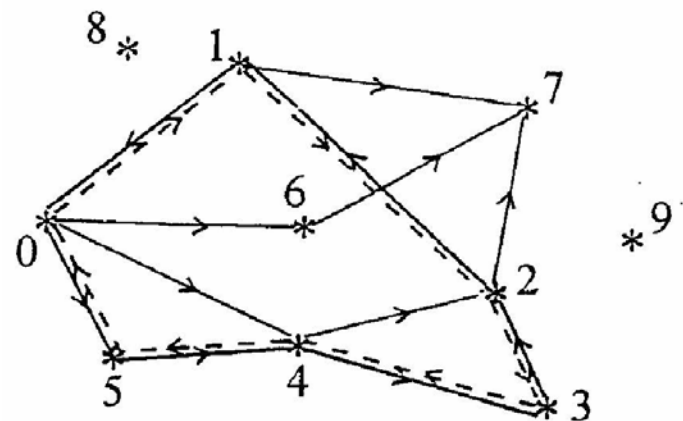
$$P(7) = |\Psi(7)|^2 = \sum_j t_j^2 + \sum_{j \neq k} t_j t_k \cos(\varphi_j - \varphi_k)$$

В пределе  $j \rightarrow \infty$  мы получаем классический результат - сумма вероятностей распространения по всем путям.

$$P(7) = \sum_j t_j^2$$

А что будет, если начальная и конечная точки выбраны не случайно? Пусть начальная и конечная точки совпадают в точке О. Какова вероятность возвращения в ту же точку из которой вышел электрон?

Это например траектории 0-1-7-6-0 или 0-5-4-0. Если различные пути выбраны случайно, то набег фаз случайны и при усреднении мы ничего нового не получим.



Но есть пути, которые удовлетворяют соотношению инверсии времени. Это, например траектории 0-1-2-3-4-5-0 и 0-5-4-3-2-1-0.

Симметрия обращения времени означает, в частности, что фазы, набираемые на каждой траектории из такой пары равны друг другу. Обозначим (+) и (-) коэффициенты прохождения и набег фазы для путей распространения по часовой стрелке и против. Тогда вероятность возвращения в точку 0 по одному из путей  $j$

$$P_j(0 \rightarrow 0) = t_{j+}^2 + t_{j-}^2 + t_{j+}t_{j-} \cos(\varphi_j - \varphi_j) + t_{j-}t_{j+} \cos(\varphi_j - \varphi_j) = 4t_j^2,$$

поскольку  $t_{j+} = t_{j-}$  и набег фаз равны. Суммируя по всем парам путей взаимно-обращенных по времени, получаем вероятность возврата в исходную точку

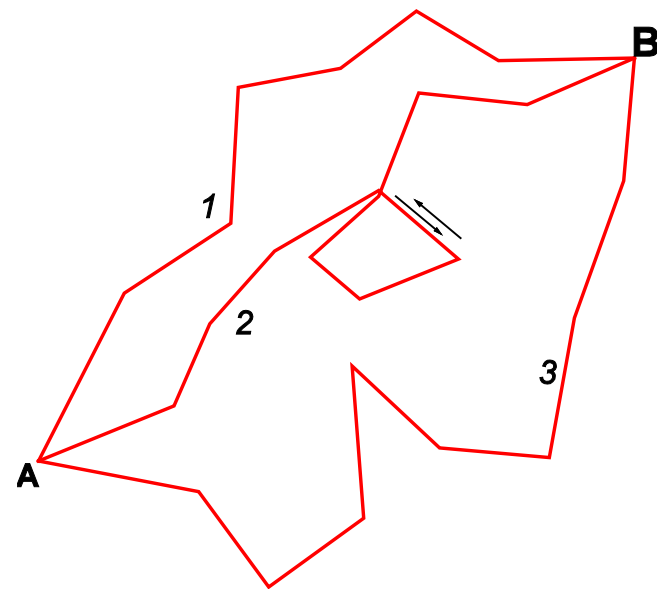
$$P(0 \rightarrow 0) = \sum_j P_j(0 \rightarrow 0) = 4 \sum_j t_j^2,$$

Двойка возникла из-за того, что одну и ту же траекторию мы посчитали дважды. Второй коэффициент 2 означает симметрию двух путей взаимно-обращенных по  $t$ .

Осмыслим результат: фазокогерентное сложение взаимно-обращенных по времени траекторий приводит к увеличению вероятности вернуться назад. Это часто называют “когерентное рассеяние назад” (coherent backscattering). Этот результат является основой слабой локализации (WL).

В реальной ситуации, траектории распространения электронных волн могут содержать петли самопересечения. Минимально возможная площадь таких петель  $\sim l^2$ , а максимально возможная площадь -  $\sim l^2_\varphi$ .

Этот диапазон площадей определяет диапазон магнитных полей, которые (вследствие нарушения симметрии обращения времени) подавляют слабую локализацию и восстанавливают Друдевское классическое значение проводимости.

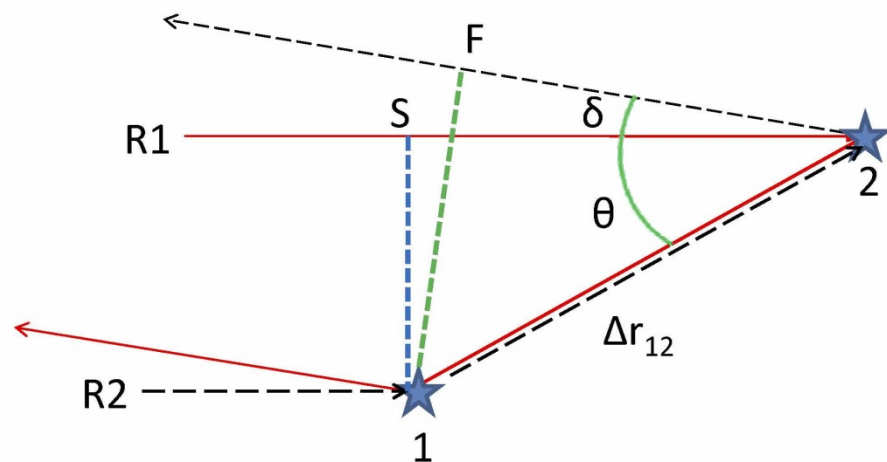


$$\sigma_{AB} = \sum P_i \quad \text{- classical}$$

$$\sigma_{AB} = |\sum \Psi_i|^2 = \sum |\Psi_i|^2 + 2\Psi_i\Psi_j \quad \text{- quantum}$$

## 14.1.2 В каком направлении происходит когерентное рассеяние

Выберем некоторый угол  $\delta$  по отношению к направлению падающей волны и будем следить за всеми лучами отражающимися под углом  $\delta$ . На рис. изображены два упругих рассеивателя (1 и 2) и плоская электронная волна, набегающая на них с левой стороны. Применим представления геометрической оптики.

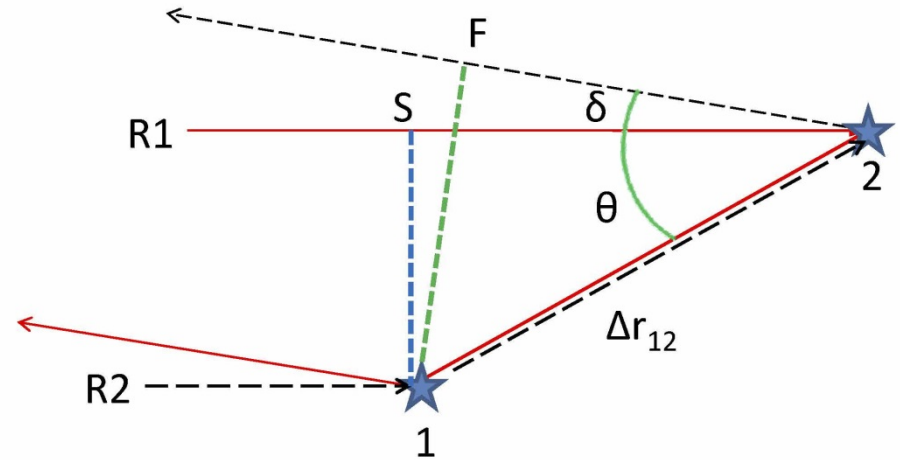


На линии  $S - 1$  волна имеет плоский фронт (изображенный штриховой линией). Волна частично рассеивается непосредственно на каждом встреченном ей рассеивателе и возвращается назад. Кроме того, волна частично проходит и рассеивается на втором рассеивателе, отстоящем на расстоянии  $\Delta r_{1,2}$  от первого и также поворачивает налево. Для того, чтобы найти полную волну, отраженную налево, надо просуммировать все отраженные волны с учетом их фаз.

Параллельные лучи  $R1$  и  $R2$  набегающего пучка с плоским фронтом. Чтобы учесть эффекты интерференции выберем некоторый угол  $\delta$  по отношению к направлению падающей волны будем следить за всеми лучами отражающимися под углом  $\delta$ . Луч  $R1$  отражается в точке 2 и идет в точку 1, от которой отражается налево под углом  $\delta$ .

**ДЗ: найти диапазон углов, в котором происходит когерентное рассеяние назад**

Луч  $R2$  отражается от 1, попадает на 2 (т.е. идет противоположным путем лучу  $R1$ ) и как мы предполагаем, отражается от 2 под углом  $\delta$ . Начальная точка  $S$  для луча  $R1$  и точка 1 для луча  $R2$  находятся на линии одного волнового фронта. Как видно, первый луч проходит путь  $S \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , а второй луч проходит путь  $1 \rightarrow 2 \rightarrow F$ . После этого, оба луча выходят под одним и тем углом  $\delta$ . Разность длин путей  $\Delta l_{1,2}$  для волн исходящих из точек 2 и 1 под углом  $\delta$  равна:



$$\Delta l_{1,2}(\delta) = \Delta r_{1,2}[\cos \theta - \cos(\theta + \delta)]$$

Усредняя по углам  $\delta$  после несложной но длинной тригонометрии получим

$$\langle \varphi_{1,2} \rangle \sim \frac{l_e}{\lambda_F} \langle \delta^2 \rangle,$$

где  $l_e$  - расстояние между рассеивателями. Волны двух лучей будут складываться конструктивно, если их фазы отличаются меньше чем  $\pi/2$ , т.е.  $\langle \varphi \rangle < \pi/2$ . Отсюда получаем условие на максимальный угол  $\delta$ :

В диффузионном случае по определению  $\lambda_F \ll l_e$ , поэтому  $\delta \ll 1$

$$\delta^2 \frac{l_e}{\lambda_F} < \pi/2$$

$$\delta < \sqrt{\frac{\lambda_F}{l_e}}$$

### 14.1.3 Влияние слабой локализации на проводимость

Для простоты, рассмотрим случай 2d системы. Для этого мы начнем с Эйнштейновского выражения для диффузии. Вспомним диффузионное уравнение и его решение - распределение плотности частиц в момент времени  $t$  :

$$n_{2d}(\vec{r}, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp(-r^2/4Dt) \sim \frac{n_0}{4\pi Dt}$$

Смысл его - это вероятность нахождения частиц в точке  $r$  в момент времени  $t \gg \tau$  .

Среднее расстояние на которое ансамбль частиц уйдет за время  $t$  от начала координат есть  $l(t) = (Dt)^{1/2}$  .

Отсюда объем, внутри которого может находиться электрон в момент времени  $t$  (из-за расплывания функции распределения) порядка  $l^2 \sim (Dt)^{d/2} = Dt$ .

Некоторые из электронов, в результате когерентного отражения назад, могут вернуться в начало координат. Объем, из которого электрон за время  $dt$  может попасть в начало координат, порядка  $(\cos\theta)^2 \Delta S dt = (\lambda_F/l) \cdot l^2 dt = \lambda_F l dt = l v_F dt$ .



Отношение этих двух объемов определяет относительное число электронов, которые побывали в начале координат за время  $dt$  за счет когерентного рассеяния назад, причем минимальное время, за которое электрон может вернуться назад - это  $\tau$ , а максимальное время - это время сбоя фазы  $\tau_\phi$ . В результате

$$\frac{\delta\sigma_{2d}}{\sigma} \sim - \int_{\tau}^{\tau_\phi} \frac{v_F \lambda_F}{Dt} dt = \frac{v_F \lambda_F}{D} \ln \left( \frac{\tau_\phi}{\tau} \right) = - \frac{4\pi}{k_F l} \ln \left( \frac{\tau_\phi}{\tau} \right)$$

поскольку  $D_{2d} = v_F^2 \tau/2$ . Абсолютное значение поправки к проводимости

$$\Delta\sigma_{2d} \sim - \frac{2e^2}{h} \frac{\pi l}{\lambda_F k_F l} \frac{4\pi}{k_F l} \ln \left( \frac{\tau_\phi}{\tau} \right) = - \frac{2e^2}{h} \ln \left( \frac{\tau_\phi}{\tau} \right)$$

Если 2d система является пленкой толщины  $b \ll l_\phi$ , то

$$\frac{\delta\sigma_{2d}}{\sigma} \approx - \frac{1}{k_F l} \frac{1}{k_F b} \ln \left( \frac{\tau_\phi}{\tau} \right)$$

Для 1d системы (проволока диаметром  $b \ll l_\varphi$ )

$$\frac{\delta\sigma_{1d}}{\sigma} \approx - \left( \frac{1}{k_F b} \right)^2 \left( \frac{l_\varphi}{l} - 1 \right)$$

Все эти поправки отрицательные, они уменьшают проводимость. Видно, что слабая локализация дает максимальный эффект в 1d системе. При понижении температуры  $l_\varphi$  растет как  $1/T$  и поправки расходятся.

**Q:** Станет ли проводимость отрицательной в пределе  $T \rightarrow 0$ ?

Для 1d системы (проволока диаметром  $b \ll l_\varphi$ )

$$\frac{\delta\sigma_{1d}}{\sigma} \approx - \left( \frac{1}{k_F b} \right)^2 \left( \frac{l_\varphi}{l} - 1 \right)$$

Все эти поправки отрицательные, они уменьшают проводимость. Видно, что слабая локализация дает максимальный эффект в 1d системе. При понижении температуры  $l_\varphi$  растет как  $1/T$  и поправки расходятся.

**А:** Проводимость отрицательной не станет, поскольку наше диффузионное рассмотрение справедливо лишь для  $l \gg \lambda_F$ . Когда из-за роста  $l_\varphi$  при понижении температуры будет достигнут этот предел по длине пробега, то система перейдет в локализованное состояние, в котором проводимость при конечной температуре определяется другими физическими процессами – термоактивацией и туннелированием, а не диффузией.

Для 3d системы эффект слабой локализации минимален

$$\frac{\delta\sigma_{3d}}{\sigma} \approx - \frac{1}{k_F^2 l} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{l_\varphi} \right)$$

## Вывод WL поправки к проводимости через поправку к коэффициенту диффузии

Когерентное отражение назад уменьшает коэффициент диффузии на величину  $\Delta D$ . Воспользуемся формулой Кубо для корреляций скорость-скорость:

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt.$$

Мы хотим вычислить поправку к  $D$  из-за корреляции в рассеянии назад в малом интервале углов. Отрицательную добавку в коэффициент диффузии можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta D \approx & -\langle v_F v_F \cos(\delta_{\max}) P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle = \\ & -\langle v_F^2 \delta_{\max}^2 P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь  $|v_x(t)| \sim |v_x(0)| \sim v_F$ ,  $\Delta S(r = 0)$  - некоторая площадь вокруг точки  $r = 0$  и усреднение  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по всем направлениям падающего луча.

Усреднение по всем углам дает обратную размерность пространства  $1/d$  - вспомним формулу для коэффициента классической диффузии  $D = (1/d)v_F^2 \tau$ .

## Вывод WL поправки к проводимости через поправку к коэффициенту диффузии

Когерентное отражение назад уменьшает коэффициент диффузии на величину  $\Delta D$ . Воспользуемся формулой Кубо для корреляций скорость-скорость:

$$D = \int_0^{\infty} \langle \bar{v}_x(t) \bar{v}_x(0) \rangle dt.$$

Мы хотим вычислить поправку к  $D$  из-за корреляции в рассеянии назад в малом интервале углов. Отрицательную добавку в коэффициент диффузии можно записать как

$$\begin{aligned} \Delta D \approx & -\langle v_F v_F \cos(\delta_{\max}) P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle = \\ & -\langle v_F^2 \delta_{\max}^2 P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) \rangle. \end{aligned}$$

Максимальный угол предполагается малым (рассеяние назад, поэтому возникает  $\delta_{\max}^2$ ). Кроме того, мы записали вероятность возвращения “назад в исходную точку”  $x = 0$  как  $P_{\text{return}}(\Delta S(r = 0))$ , поскольку это и есть вычисляемая добавка из-за возвращения назад.

Теперь надо договориться, что мы будем называть возвращением назад. Разумно это определить как классическая вероятность  $P_{\text{return}}(\Delta S(r = 0))$  для частицы, стартовавшей в точке  $r = 0$  вернуться в пределы некоторой площади  $\Delta S$  вокруг точки  $r = 0$ , причем вернуться в пределах некоторого характерного времени. Точка исхода, конечно, выбрана произвольно. Вероятность вернуться назад за все времена равна

$$P_{\text{return}}(\Delta S(\bar{r} = 0)) = \Delta S C_{\text{return}} = \Delta S \int_0^{\infty} C(0, t) dt = \Delta S \frac{1}{n_0} \int_0^{\infty} n(0, t) dt,$$

где  $n(0, t)$  - расплывающееся во времени распределение частиц, описывающее вероятность вернуться назад в точку начала в момент времени  $t$ . Мы уже это вычисляли для 2D системы:

$$n_{2d}(r, t) = \frac{n_0}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \sim \frac{n_0}{4\pi Dt}$$

Теперь надо из физики проблемы обрезать времена. Ясно, что нельзя вернуться назад в результате интерференции за время меньше  $\tau_e$ . Можно было бы резко обрезать нижний предел интегрирования, но из-за статистической природы диффузии лучше это сделать добавив множитель  $(1 - \exp(-t/\tau_e))$  в коэффициент  $C_{\text{return}}$ . Надо также обрезать времена, большие чем  $\tau_\varphi$  множителем  $\exp(-t/\tau_\varphi)$ .

Для простоты мы все же нагло обрежем пределы интегрирования вместо культурного сглаживания на краях. Оценим  $\Delta S$  -площадь для возврата. Ясно, что у нас есть один параметр длины  $l_e$ , поэтому  $\Delta S \sim l_e^2$ . Подставим эти все куски в предыдущие формулы, получим

$$\Delta D_{2d} \approx - \frac{\overbrace{l_e^2}^{\lambda_F/l_e} \underbrace{v_F^2}_{(1/2) v_F^2 \tau} \underbrace{\delta_{max}^2}_{(1/2) v_F^2 \tau}}{8\pi D} \int_{\tau_e}^{\tau_\varphi} \frac{1}{t} dt \propto \ln \left( \frac{\tau_\varphi}{\tau_e} \right)$$

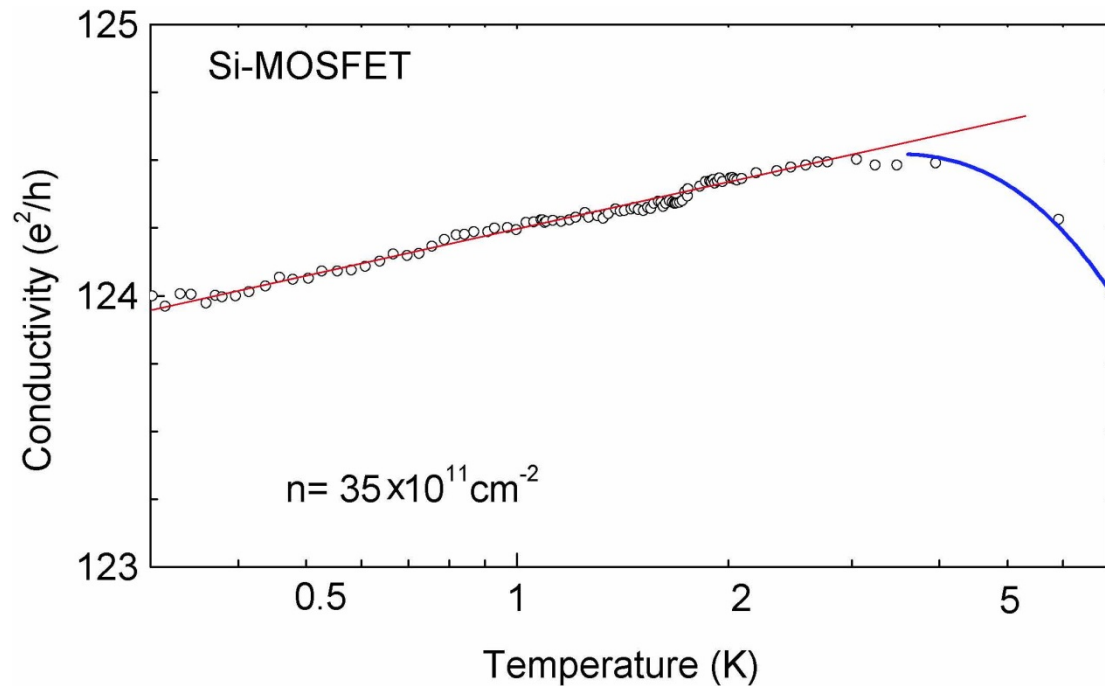
Окончательное выражение для WL поправки к проводимости  $\sigma_{2d} = e^2 \nu_{2d} D_{2d}$

$$\Delta \sigma_{2d} = - \frac{e^2}{2\pi \hbar} \ln \left( \frac{\tau_\varphi}{\tau_e} \right)$$

Если электронная система имеет  $g_v$  долин, вклады от разных долин конструктивно складываются (если на временах  $\tau_\varphi$  не происходит междолинное рассеяние) и амплитуда WL должна быть в  $g_v$  раз больше.

Проводимость для образца Si-МДП в диапазоне температур (0.3 – 7)К.

V.M. Pudalov, G. Brunthaler, A. Prinz, and G. Bauer, Phys. Rev. B 60 2154 (1999).



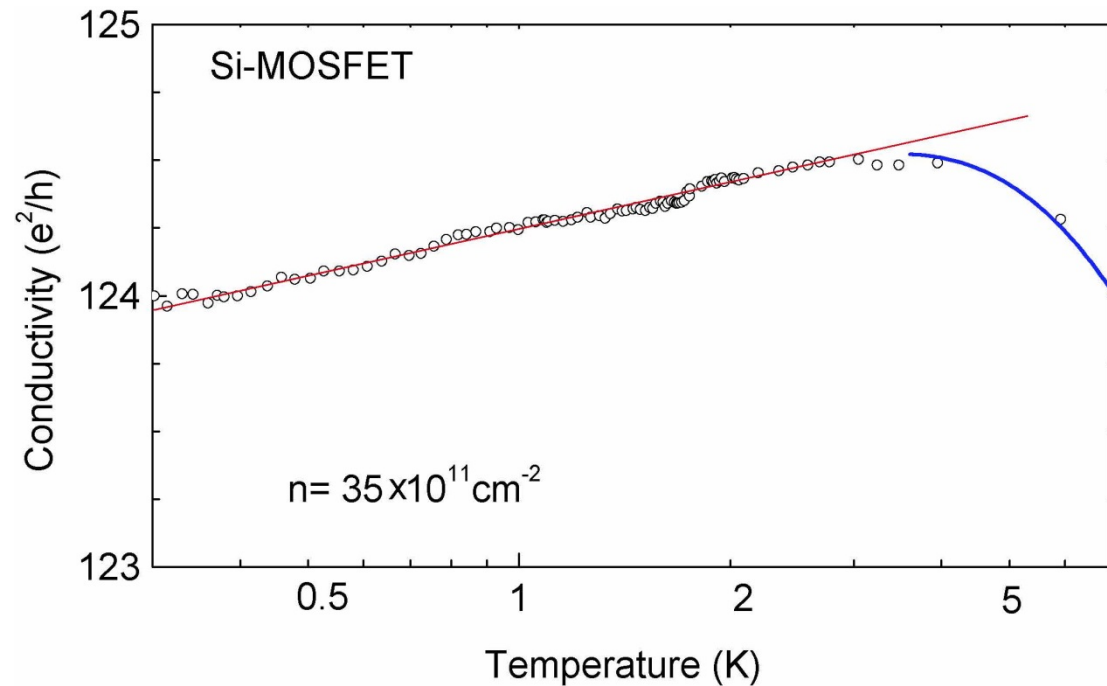
Концентрация электронов выбрана столь высокой, что эффекты е-е взаимодействия в диффузионном режиме не очень заметны на фоне слабой локализации.

Видно, что T- зависимость проводимости логарифмическая и имеет правильный порядок  $\sim e^2/h$ . Для  $g_v=2$  проводимость должно изменяться на  $2e^2/h$  при изменении температуры в e-раз, или, на  $4.6e^2/h$  при изменении температуры на порядок. В эксперименте, однако проводимость изменяется почти на порядок слабее, всего на  $0.5e^2/h$  при изменении температуры от 0.3 до 3К.



Проводимость для образца Si-МДП в диапазоне температур (0.3 – 7)К.

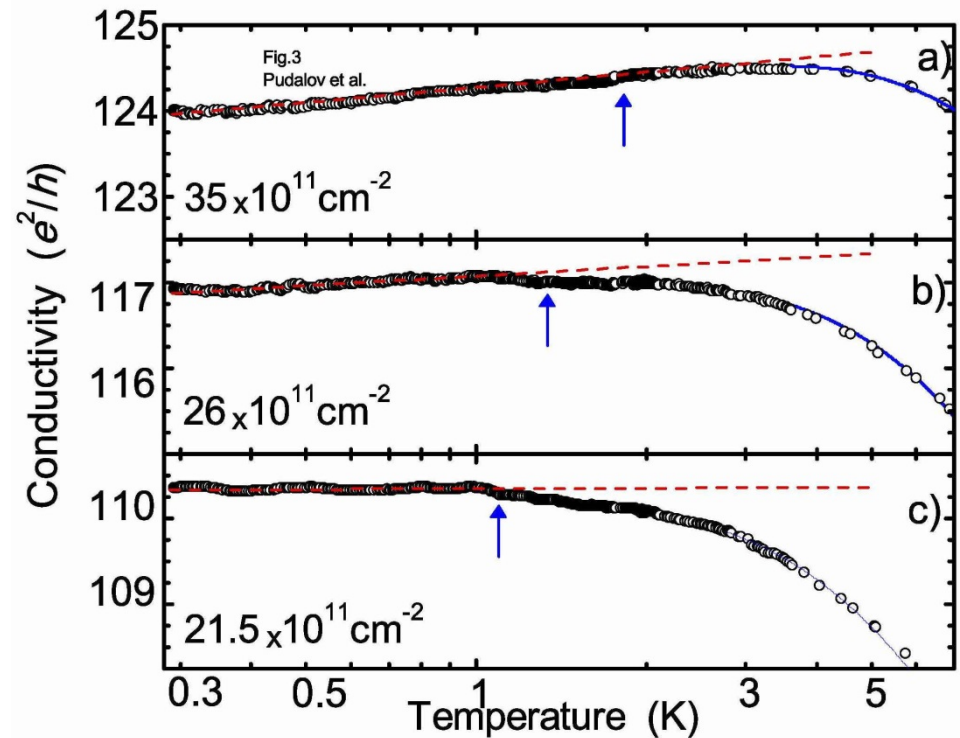
V.M. Pudalov, G. Brunthaler, A. Prinz, and G.Bauer, Phys. Rev. B 60 2154 (1999).



Это является следствием остаточного вклада эффектов электрон-электронного взаимодействия, которые дают аналогичную логарифмическую температурную зависимость проводимости, но противоположного знака. Эффекты электрон-электронного взаимодействия, однако, мы пока не обсуждаем.

Чтобы убедиться в правильности нашей интерпретации, рассмотрим эволюцию  $\delta\sigma(T)$  при изменении и концентрации.

При уменьшении  $n$  наклон  $\ln(T)$  зависимости резко уменьшается. Это доказывает присутствие еще одного механизма, который дает поправку другого знака.



#### 14.1.4. Влияние перпендикулярного магнитного поля

В магнитном поле возникает разность фаз для сопряженных волн, распространяющихся вдоль замкнутой петлевой траектории в направлении по и против часовой стрелки. Для сопряженных волн  $d\mathbf{r} = -d\mathbf{r}$  и кинетический импульс  $\mathbf{p} = -\mathbf{p}$ .

Поскольку  $k = (1/\hbar)p = (1/\hbar)[mv - (e/c)A]$ , находим

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 &= \frac{1}{\hbar} \oint d\bar{r}_1 \left( \bar{p}_1 + \frac{e}{c} \bar{A} \right) - \frac{1}{\hbar} \oint d\bar{r}_2 \left( \bar{p}_2 + \frac{e}{c} \bar{A} \right) \\ &= \frac{2e}{\hbar c} \oint \bar{A} d\bar{r}_1 = \frac{4\pi\Phi}{\Phi_0}\end{aligned}$$

Интерференционная компонента от каждой траектории поэтому осциллирует с магнитным полем. Однако, магнитные потоки, которые пронизывают контуры, различны, так что интерференция случайна. В результате общий интерференционный вклад в проводимость будет уменьшаться с полем начиная с поля

$$Bl_\varphi^2 \approx \Phi_0$$

$$B_\varphi = \frac{\hbar c}{eD\tau_\varphi}$$

Более подробные вычисления приводят к следующему выражению, известному как формула Хиками-Ларкина-Нагаоки:

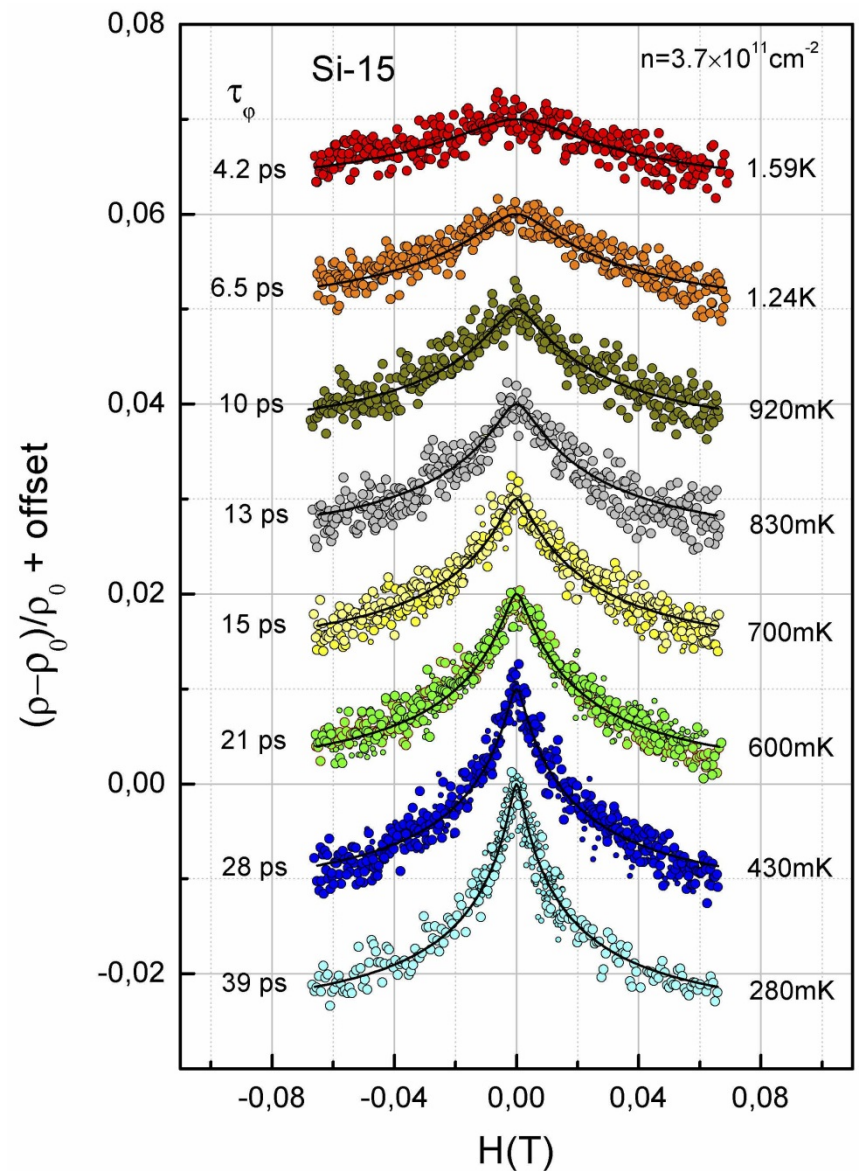
$$\Delta\sigma_{xx} = -\frac{\alpha g_{\nu} e^2}{2\pi^2 \hbar} \left[ \Psi \left( \frac{1}{2} + \frac{a}{\tau} \right) - \Psi \left( \frac{1}{2} + \frac{a}{\tau_{\varphi}} \right) \right]$$

где  $\Psi$  - Digamma функция от приложенного магнитного поля  $B$ ,  $a = \hbar/4eBD$  и  $D$  коэффициент диффузии. В этой формуле имеются два характерные значения поля –

- (1)  $B_{\varphi}$  и
- (2) “транспортное поле”  $B_{tr} = \hbar c/(4eD\tau)$ . Первое значение поля определяет диапазон почти квадратичного изменения сопротивления – макушку кривой слабой локализации.

Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить  $\tau_\phi$ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения  $\rho(B_\perp)$  в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение  $\tau$ , хотя, на практике, это оказывается не просто.

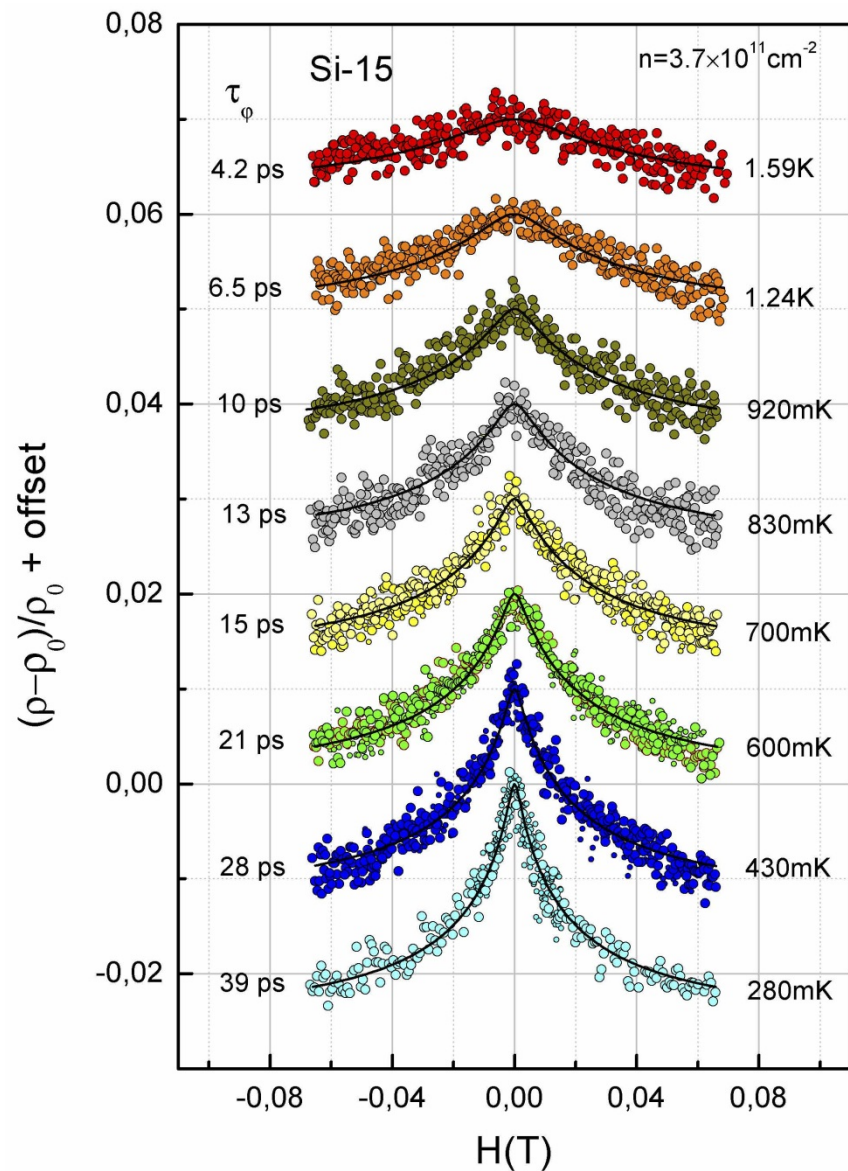
**Q:** Как определить в эксперименте значения  $D$  и  $\tau$  ?



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 87, 096802 (2001)

Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить  $\tau_\phi$ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения  $\rho(B_\perp)$  в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение  $\tau$ , хотя, на практике, это оказывается не просто.

**A:** Из измерений эффекта Холла в слабом поле определяем концентрацию электронов  $n$ , из нее  $k_F$  и  $v_F$ , откуда  $D = (1/d)v_F^2\tau$ .  $\tau$  находим из  $T$ -зависимости сопротивления при низких температурах, в отсутствии фононов и в условиях вырожденной системы  $T \ll T_F$ .



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 87, 096802 (2001)



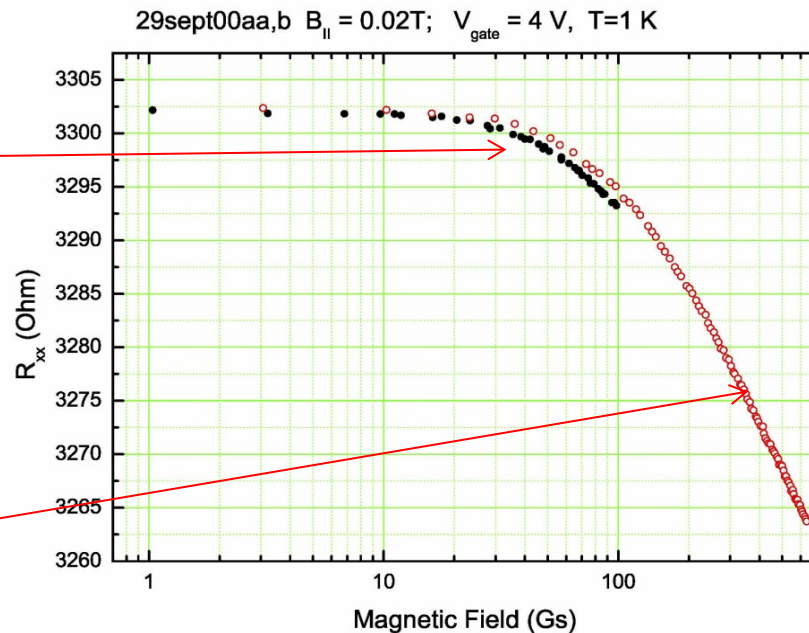
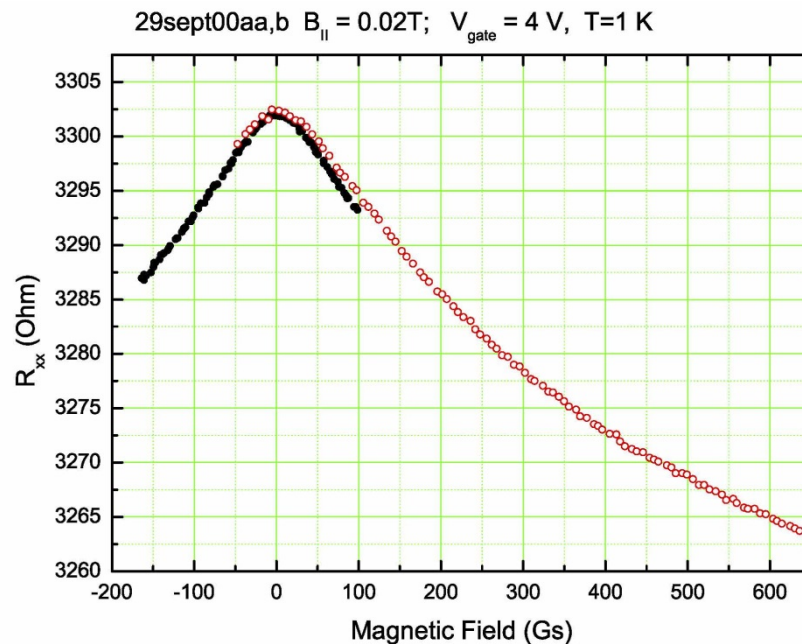
Аппроксимация экспериментальных данных в этой области формулой HLN позволяет определить  $\tau_\varphi$ . Второе, большее значение поля – определяет поведение магнитосопротивления на крыльях. Аппроксимация поведения  $\rho(B_\perp)$  в области крыльев, в принципе, позволяет определить значение  $\tau$ , хотя, на практике, это оказывается не просто.

### Два характерных поля

(1)  $B_\varphi$  Это значение поля определяет диапазон почти квадратичного изменения сопротивления – макушку кривой слабой локализации.

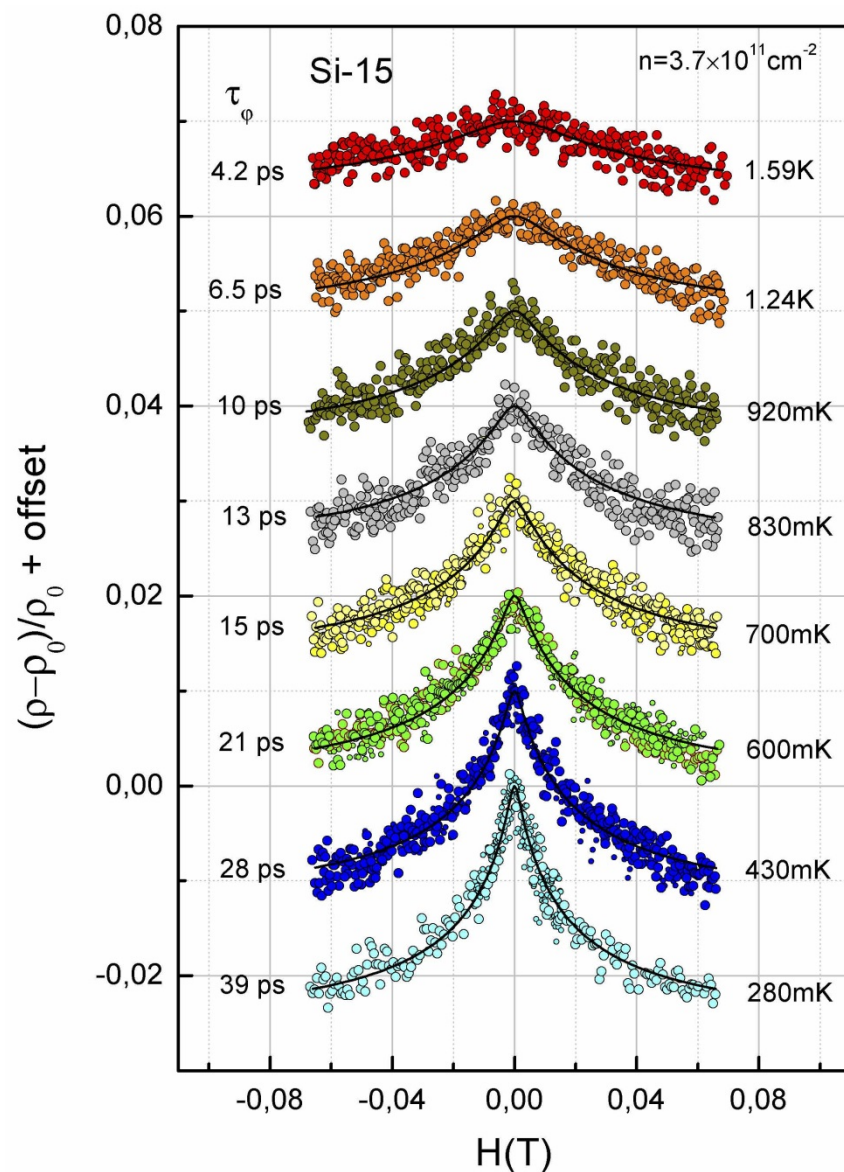
и

(2) “транспортное поле”  $B_{tr} = \hbar c / (4eD\tau)$ .



Префактор  $g_v$  описывает долинное вырождение ( $g_v = 2$  для плоскости (100) Si) и  $\alpha$  зависит от отношения внутривалинной к междолинной скорости рассеяния и должно лежать в интервале от 0.5 до 1.

В данном примере для  $\alpha$  было найдено значение от 0.55 до 0.8, т.е. в ожидаемом диапазоне.



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. 87, 096802 (2001)



Зависимость  $\tau_\varphi$  от проводимости и от температуры вычисляется в микроскопической теории. Есть два механизма рассеяния:

(1) e-ph - доминирует при высоких  $T$  и дает  $\tau_\varphi \propto 1/T^2$

(2) e-e рассеяние в пределе малого переносимого импульса (низкие  $T$ ) дает зависимость  $\tau_\varphi \propto 1/T$

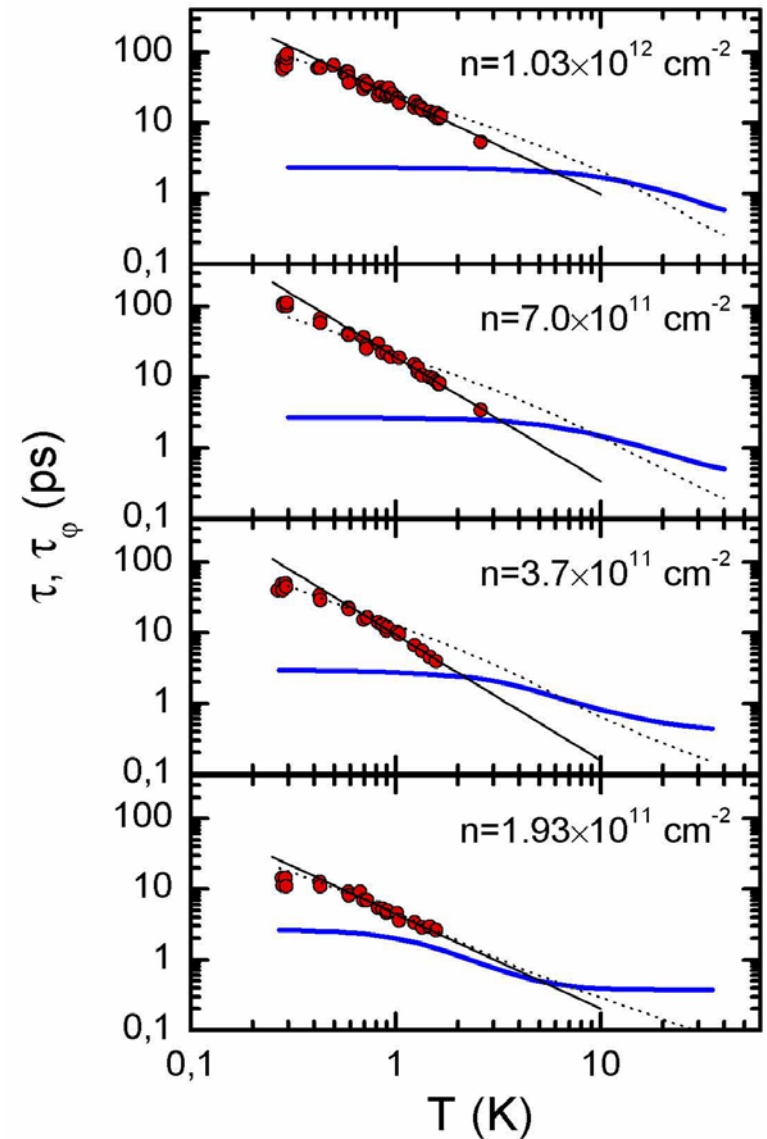
$$\tau_\varphi = \frac{\hbar g}{2\pi k_B T \ln(g/2)},$$

где  $g$  - безразмерная проводимость в единицах  $e^2/h$ . Проблема, вроде бы, возникает при малых значениях  $g$ , поскольку  $\ln(g/2)$  стремится к нулю когда  $g/2$  приближается к 1. На самом деле, это теоретическое описание справедливо только для  $g \gg 1$ .

Когда  $g$  становится порядка 1, отношение  $g/\ln(g/2)$  следует заменить членом порядка единицы.

Измеренная и вычисленная  
зависимость  $\tau_\phi(T)$ .  
Пунктирная линия представляет  
теоретически ожидаемое поведение  
 $\tau_\phi \propto T^{-p}$

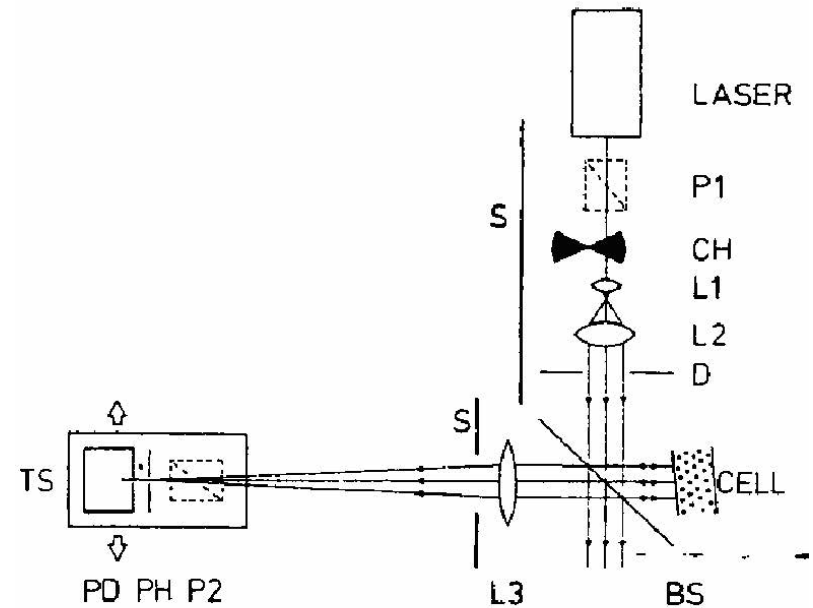
На Рисунке поведение  $g/\ln(g/2)$  в  
диапазоне  $10 \leq g \leq 100$  фитировано  
полиномом второго порядка и получена  
зависимость  $f(g) = 3.78 + 0.253g - 0.00036g^2$   
для аппроксимации  $g$  к малым значениям.



G. Brunthaler, A. Prinz, G. Bauer, V.M.  
Pudalov, PRL 87, 096802 (2001)

## 14.1.5 Когерентное рассеяние света

Ясно, что когерентное рассеяние назад могут претерпевать любые волны в диффузной среде - акустические, оптические и т.д. В отличие от электронных волн, однако, нет такого замечательного инструмента как магнитное поле и эффект Ааронова-Бома для влияния на WL. Остается единственный признак когерентного рассеяния - узкий конус углов рассеяния назад



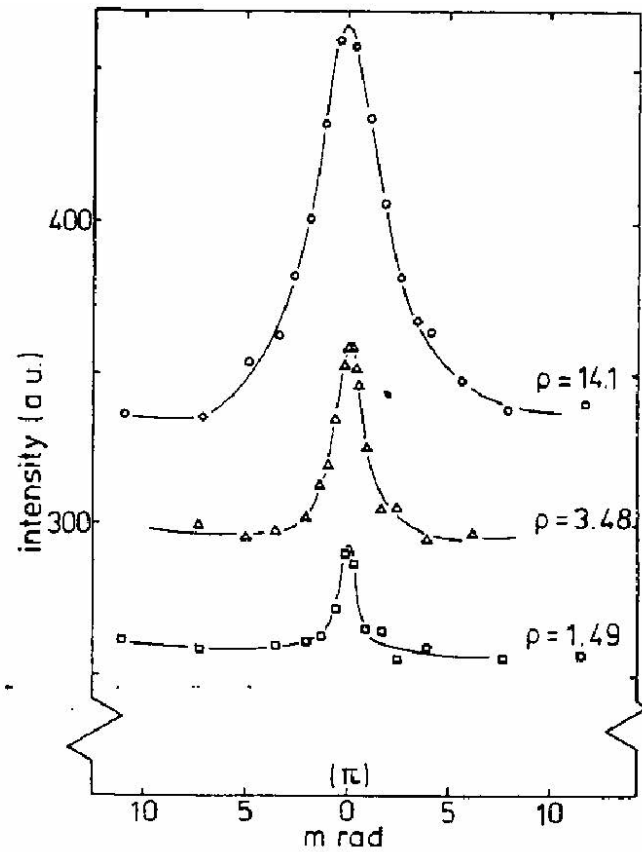
Alkbeda et al. PRL 55, 2692 (1985)

$$\delta_{cone} = 2\delta_{max} \sim \sqrt{\lambda_F/l_e}$$

- Так было для электронов, а для фотонов
- $(\lambda/l)^{1/2}$

излучение He-Ne лазера посылается через расщепитель луча (50%) на мутную среду из полистириновых или латексных шариков  $\sim 1\mu\text{м}$  диаметром. Отраженный луч регистрируется фотодетектором. Положение фотодетектора можно изменять в пространстве, и измерить зависимость отраженного света от угла.

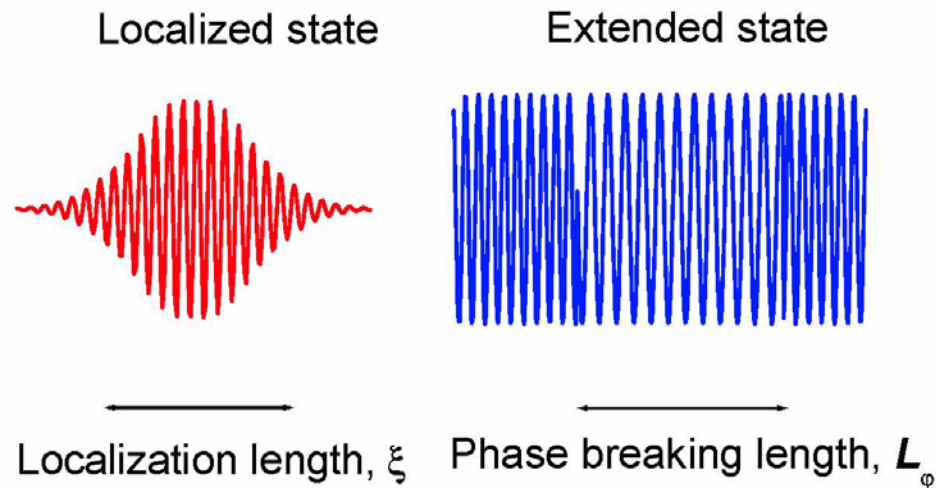
Результаты измерений  
положения фотодетектора



Когерентное рассеяние света назад в разупорядоченной среде -  
водной эмульсии из 1мкм глобул латекса.

## 14.1.6 Переход метал-изолятор

Под этим термином мы подразумеваем такие переходы, которые происходят без изменения симметрии или параметров решетки и являются чисто электронными. Что изменяется при переходе – это характер волновой функции, которая может быть локализованной или делокализованной, как схематически поясняет рисунок.



(1) Локализованное состояние может иметь большой радиус локализации, порядка размеров образца, поэтому в образцах конечных размеров или при конечной  $T$  (о трудно отличить локализованное состояние от делокализованного).

(2) Ясно, что такое физическое определение металла и изолятора резко отличается от обыденного или технического определения. Т.о., лишь при  $T = 0$  можно определить тип состояния – металл или изолятор. Это затрудняет экспериментальные исследования перехода металл-изолятор.

Для теории это явление интересно как пример непрерывного квантового перехода, происходящего под действием различных управляющих параметров. В простейшем случае управляющим параметром является беспорядок – например, концентрация примесей.

Экспериментаторы прекрасно знают, что слабо легированный Si, хотя и является (плохим) проводником при комнатной температуре, но становится изолятором при охлаждении до азотных или гелиевых температур.

Труднее понять как обстоит дело с сильно легированным кремнием - ведь его проводимость не исчезает при температурах жидкого гелия.

Еще труднее дать ответ в том случае, когда управляющими параметрами являются межэлектронное взаимодействие или комбинация беспорядка и взаимодействия, которые нельзя рассматривать независимо друг от друга.

### **Минимальная металлическая проводимость**

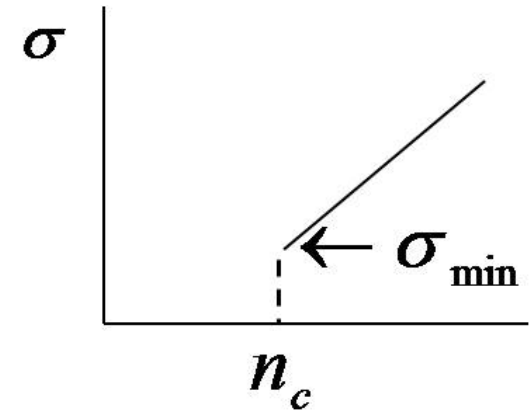
Диффузионное описание Друде применимо, пока длина пробега  $l_{tr} \gg \lambda_F$ . По мере увеличения беспорядка,  $l_{tr}$  уменьшается. В связи с этим возникает вопрос: что будет с проводимостью при нарушении этого соотношения. Ответ дан А.Ф.Иоффе и его молодым сотрудником А.Р. Регелем [Prog. Semicond. 4, 237 (1960)]: длина пробега при диффузионном движении не может быть много меньше  $\lambda_F$ .

$$l_{tr}^{min} \sim \frac{1}{k_F}$$



$$\sigma_{min}^{(2D)} = \frac{e^2}{h}$$

Пусть уменьшение проводимости происходит за счет увеличения беспорядка (например, концентрации примесей), тогда



Соответствующая модель перехода металл-изолятор в системе со случайным беспорядком была сформулирована Андерсоном и переход называется переходом Андерсона.

Переход Андерсона - это **квазиклассическая** модель перехода металл-изолятор под действием беспорядка. Вследствие пренебрежения волновыми свойствами электронов из результата выпала размерность.

Ясно, что этот переход наиболее четко выражен при  $T \rightarrow 0$ , т.е. это квантовый фазовый переход.

## Скейлинговое описание проводимости: **учет волновых свойств**

**Сформулировано Abrahams, Anderson, Licciardello, Ramakrishnan ('79); в основе также лежат результаты Wegner ('79), Thouless ('74,'77)**

Скейлинговая теория пытается описать проводимость и явление локализации, рассматривая эволюцию кондактанса  $G$  при изменении размеров системы  $L$ .

**Уточним картину:** электрон движется в среде со случайными рассеивателями. Фаза его волновой функции изменяется случайно.

**Идея** преобразования ренормализационной группы состоит в следующем: рассмотрим блок размерами  $L \times L \times L$  и будем следить за эволюцией кондактанса системы  $G$  по мере изменения  $L$  от микроскопического масштаба  $l_{tr}$  к макроскопическому  $L$ . Составляя вместе кубики размера  $l_{tr}$  мы придем в конце концов к системе больших размеров.

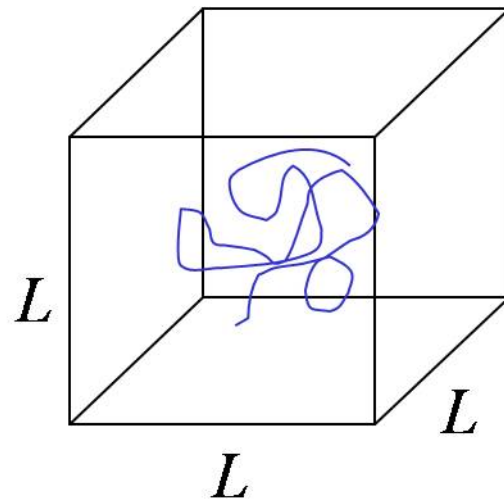


**Гипотеза** скейлингового описания состоит в том, что предполагается существование такой универсальной функции  $\beta$ , которая описывает эволюцию кондактанса при масштабировании размеров системы ( $G$  обезразмерено в единицах  $e^2/h$ ):

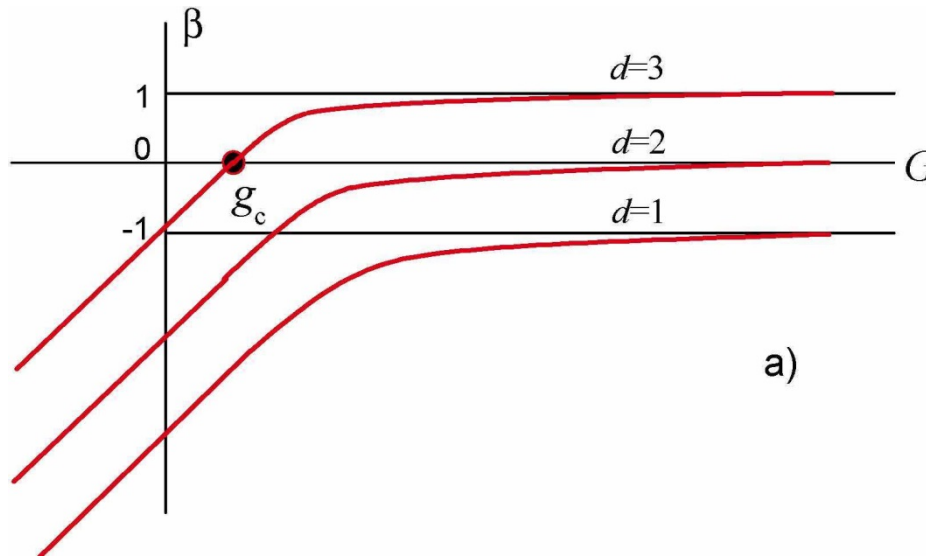
$$\frac{d \ln G}{d \ln \xi} = \beta(G), \quad \text{где } \xi = \frac{L}{l_{tr}}$$

и эта  $\beta$ -функция зависит только от кондактанса  $G$ . Попробуем сконструировать  $\beta$ -функцию из простых соображений. Рассмотрим процесс диффузии квантовой частицы. Ее квазиклассическая траектория движения схематически изображена на рисунке.

Для блока размерами  $l_{tr} < l_\varphi$  квантовые интерференционные поправки к проводимости несущественны и значение кондактанса просто определяет начальную точку на искомой кривой  $\beta(g)$ . Пусть эта начальная точка отвечает малому беспорядку и, следовательно, большому значению  $G \gg 1$ .

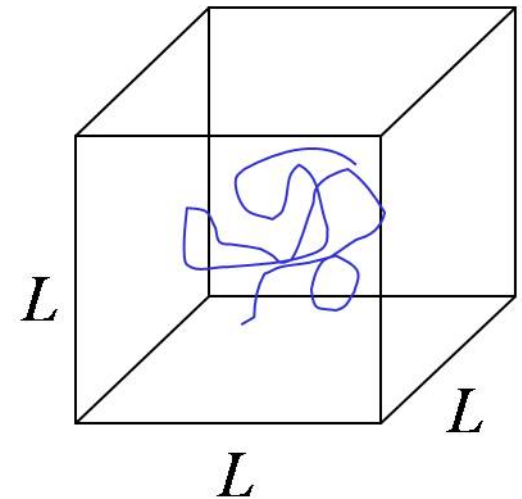


Для блока размерами  $l_{tr} < l_\phi$  квантовые интерференционные поправки к проводимости несущественны и значение кондактанса просто определяет начальную точку на искомой кривой  $\beta(g)$ . Пусть эта начальная точка отвечает малому беспорядку и, следовательно, большому значению  $G \gg 1$ . В асимптотике  $G \rightarrow \infty$  для начальной точки  $L = l_{tr}$  на кривой  $\beta(G)$  мы обязаны получить очевидный классический результат  $G \propto L^{d-2}$ , где  $d$  – размерность системы.



$$\frac{d \ln G}{d \ln \xi} = \beta(G), \quad \text{где } \xi = \frac{L}{l_{tr}}$$

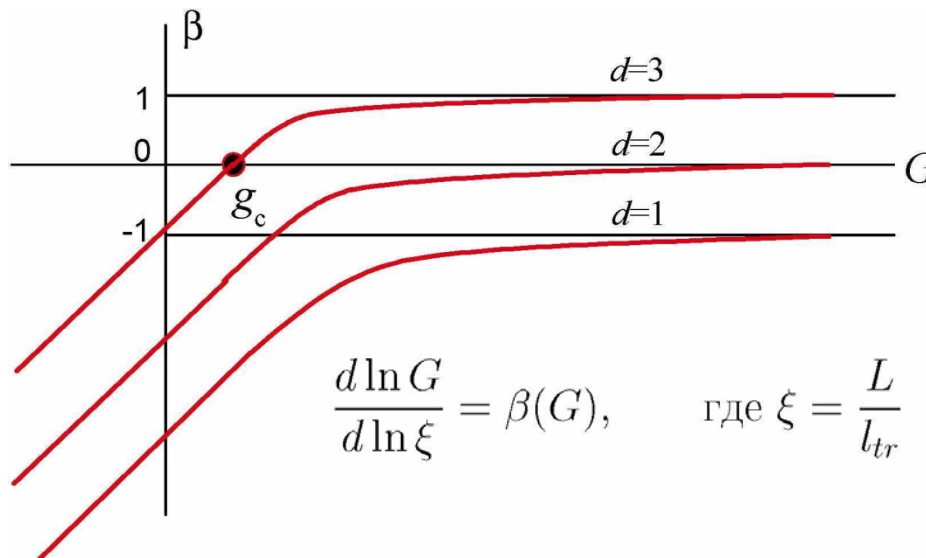
Три горизонтальные линии показывают  $\beta = -1, 0, 1$  для асимптотики  $G$  в классическом пределе для систем с размерностью  $d=1, 2$  и  $3$ , соответственно. При увеличении размера  $L$  мы имеем дело с диффузионным транспортом; поэтому  $G$  будет слегка меньше классического значения, отличаясь от него на квантовую интерференционную поправку.



Для размерности  $d = 3$  изображающая точка будет двигаться направо, в сторону больших  $G$ , поскольку  $\beta^{(3)} > 0$ .

Для  $d = 1$  функция  $\beta^{(1)}$  всегда  $< 0$  и с увеличением  $L$  изображающая точка движется налево, в сторону уменьшения  $G$ . Это отвечает интуитивным соображениям о невозможности металлического состояния в одномерной системе.

Для  $d = 2$  ситуация более деликатная. В классическом пределе  $G \rightarrow \infty$  функция  $\beta^{(2)} = 0$  и поэтому является крайне чувствительной к допущениям сделанным в теории.



В квантовой модели невзаимодействующих электронов  $\beta^{(2)} \approx 0$  и квантовые интерференционные поправки делают ее отрицательной; поэтому, с увеличением  $L$  изображающая точка движется налево в сторону уменьшения  $G$ .

Для  $d = 1, 2$ , а также для разупорядоченной системы  $d = 3$  изображающая точка оказывается в области  $\beta < 0$ , поэтому при увеличении  $L$  и соответствующем уменьшении проводимости должен наступить прыжковый режим транспорта и экспоненциальное поведение проводимости  $G \propto \exp(-L/L_0)$ . Такое поведению отвечает линейное уменьшение  $\beta$  с  $\ln G$  на рисунке для любой размерности.

## Несколько важных замечаний.

(1) Во первых, в скейлинговой теории физический смысл имеет не геометрический размер образца, а квантовая длина  $L \sim L_\varphi$ . Поэтому эффективную “длину” можно изменять путем изменения температуры  
$$L \propto T^{-\rho}, \rho \sim 1.$$

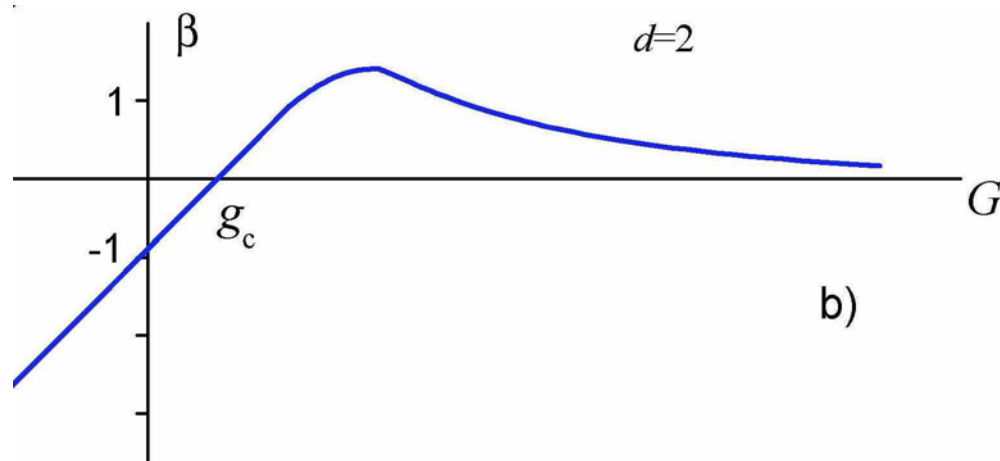
(2) Во вторых, именно в пределе  $T = 0$  определено отличие между истинно металлическим состоянием и состоянием изолятора. Как видно из рисунка, металлического состояния не существует в системе с размерностью  $d < 3$ .

Для  $d = 1$  этот вывод остается неизменен при учете различных взаимодействий в системе.

Для  $d = 2$ , ввиду близости  $\beta^{(2)}$  к нулю, учет межчастичных взаимодействий (которыми пренебрегает скейлинговая теория) может кардинально изменить вывод о невозможности металлического состояния.

(3) В качестве примера сказанному на рисунке показано схематическое поведение  $\beta(2)$  для модельной системы, в которой многочастичные эффекты проявляются только в виде спин-орбитального рассеяния.

Как видно, в этой модели знак скейлинговой функции изменяется.



Эта модель довольно искусственна, потому что при учете СО взаимодействия, в этом же порядке по теории возмущений следует учитывать также е-е взаимодействие. Последнее во всех случаях изменяет  $\beta$ -функцию более сильно, чем СО взаимодействие.

Однако, задача о взаимодействующих электронах является более сложной и в принципе не может описываться скейлинговой функцией только одного параметра. Это существенно двухпараметрическая задача (беспорядок и взаимодействие).

(4) В случае  $d = 3$  скейлинговая функция изменяет знак в некоторой точке  $G_c$ , которая является критической отталкивающей точкой квантового перехода металл-изолятор (по беспорядку, при  $T = 0$ ).